

Dans toute la leçon, K est un corps commutatif de caractéristique $\neq 2$, et E est un K -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Sauf mention contraire, $B = (e_1, \dots, e_n)$ est une base (quelconque) de E .

I - Formes quadratiques

A - Définitions, représentation matricielle

Def 1: Soit $\varphi: E^2 \rightarrow K$. On dit que φ est une forme bilinéaire si $\forall x \in E$, $\varphi(x, \cdot)$ et $\varphi(\cdot, x)$ sont linéaires, et symétrique si $\forall (x, y) \in E^2$, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$.

Ex 2: Sur K^n , $((x_i), (y_i)) \mapsto \sum x_i y_i$, sur $M_n(K)$, $(A, B) \mapsto \text{Tr}(AB)$, sur $C^0([0, 1])$, $(f, g) \mapsto \int_0^1 fg$ sont des formes bilinéaires.

Def 3: La matrice dans B d'une forme bilinéaire φ est $\text{Mat}_B(\varphi) = (\varphi(e_i, e_j))_{i,j}$.

Prp 4: Une forme bilinéaire est symétrique si, et seulement si sa matrice dans une base quelconque l'est.

Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \text{Comp}_B(x)$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \text{Comp}_B(y)$, alors $\varphi(x, y) = {}^t X \text{Mat}_B(\varphi) Y$.

Def 5: On dit que $A \in M_n(K)$ et $B \in M_n(K)$ sont congruentes s'il existe $P \in GL_n(K)$ telle que $A = {}^t P B P$, autrement dit si A et B représentent la même forme bilinéaire dans deux bases (éventuellement) différentes.

Def 6: Soit $\varphi: E^2 \rightarrow K$ bilinéaire.

- Le rang de φ est celui de sa matrice dans n'importe quelle base.
- Le discriminant de φ est l'image dans $\{0\} \cup \frac{K^\times}{\{x^2: x \in K^\times\}}$ du déterminant de la matrice de φ dans une base quelconque.

Def 7: On dit que $q: E \rightarrow K$ est une forme quadratique s'il existe $\varphi: E^2 \rightarrow K$ bilinéaire telle que $\forall x \in E$, $q(x) = \varphi(x, x)$.

Thm/Def 8: Pour toute forme quadratique q sur E , il existe une unique forme bilinéaire φ sur E telle que $\forall x \in E$, $q(x) = \varphi(x, x)$. On l'appelle forme polaire de q . Pour tout $(x, y) \in E^2$, $\varphi(x, y) = \frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y))$.

Def 9: On définit pour une forme quadratique tout ce qui a été défini précédemment pour sa forme polaire. Si q est une forme quadratique sur E , alors on dit que (E, q) est un espace quadratique.

Dans toute la suite, q est une forme quadratique sur E de forme polaire φ et de matrice M dans B .

Ex 10: Sur K^n , une forme quadratique de matrice $(a_{ij})_{i,j} \in S_n(K)$ s'écrit $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n a_{i,i} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} x_i x_j$.

B - Non dégénérescence, orthogonalité, isotropie

Def 11: On dit que $x \in E$ et $y \in E$ sont q -orthogonaux si $\varphi(x, y) = 0$.

Pour $A \subseteq E$, on définit l'orthogonal de A comme :

$$A^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in A, \varphi(x, y) = 0\}.$$

Def 12: On dit que q est dégénérée si $V^\perp \neq \{0\}$.

Prop 13: Soit F un sous-espace vectoriel de E .

$$\dim(F) + \dim(F^\perp) \geq \dim(E) \quad \text{et} \quad F \subseteq F^{\perp\perp}$$

avec égalité si q est non dégénérée.

DEV 1.a

Cor 14: Si $q|_F$ est non dégénérée, alors $E = F \oplus F^\perp$.

Ex 15: Sur K^2 , pour $\varphi: ((x_1), (x_2)), ((y_1), (y_2)) \mapsto x_1 y_1 - x_2 y_2$: pour $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a $q(x) = 0$ donc $Kx \subseteq (Kx)^\perp$ donc $q|_{Kx}$ est dégénérée, alors que q est non dégénérée, puisque de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Def 16: On dit que $x \in E$ est isotrope si $q(x) = 0$.

On dit qu'un sev. F de E est isotrope si $F \cap F^\perp \neq \{0\}$.

[Rb]
466 Prop 17: L'ensemble des vecteurs isotropes de (E, q) est un cône, appelé cône isotrope.

Def 18: On dit que q est anisotrope si son cône isotrope est réduit à $\{0\}$.

Prop 19: Si q est anisotrope, alors q est non dégénérée.

[Gr]
305 Ex 20: Le cône isotrope de $q: (x, y) \mapsto x^2 - y^2$ est $\{(x, y) \in K^2 \mid x = \pm y\}$.

[Gr]
314 Prop 21: $E = F \oplus F^\perp \iff F$ non isotrope

C - Réduction des formes quadratiques

[Rb]
463 Thm 22 (de réduction de Gauss): Il existe $(l_1, \dots, l_r)$ une famille libre de formes linéaires et $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in K^r$ telles que $q = \sum_{i=1}^r \lambda_i l_i^2$.

[Rb]
463 - 472 Algo 23: Écrivons $q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_{i,j} x_i x_j$.

► S'il existe $i \in [1, n]$ tel que $a_i \neq 0$ (quitte à renuméroter, disons $a_1 \neq 0$).

On écrit $q(x_1, \dots, x_n) = a_1 (x_1 + \frac{1}{a_1} \sum_{2 \leq j \leq n} b_{1,j} x_j)^2 + [\text{ce qui manque} = f(x_2, \dots, x_n)]$.

► Sinon, quitte à renuméroter, supposons que $b_{1,2} \neq 0$. Alors:

$$q(x_1, \dots, x_n) = 2b_{1,2} x_1 x_2 + 2x_1 \underbrace{\sum_{3 \leq j \leq n} b_{1,j} x_j}_{f_1(x_3, \dots, x_n)} + 2x_2 \underbrace{\sum_{3 \leq j \leq n} b_{2,j} x_j}_{f_2(x_3, \dots, x_n)} + \dots$$

$$= 2b_{1,2} \underbrace{\left(x_1 + \frac{1}{b_{1,2}} f_2(x_3, \dots, x_n)\right)}_{l_1} \underbrace{\left(x_2 + \frac{1}{b_{1,2}} f_1(x_3, \dots, x_n)\right)}_{l_2} + \dots$$

puis on écrit $l_1 l_2 = \frac{1}{4} ((l_1 + l_2)^2 - (l_1 - l_2)^2)$.

Puis on itère sur les autres variables.

[Rb]
± 485 Ex 24: $5xy + 6xz + 3yz = \frac{1}{20} (5x + 5y + 9z)^2 - \frac{1}{20} (5x + 5y - 3z)^2 - \frac{18}{5} z^2$.

[Rb]
473 Cor 25: Il existe une base q -orthogonale de E , i.e. dans laquelle

la matrice de q est diagonale.

Prop 26: Soit F un sev de E . Si $q|_F$ est non dégénérée, alors toute base q -orthogonale de F peut se compléter en une base q -orthogonale de E .

II - Classification...

Def 27: On dit que deux formes quadratiques q_1 et q_2 sont équivalentes s'il existe $\varphi \in GL(E)$ tel que $q_1 = q_2 \circ \varphi$. Si B est une base de E , alors cela revient à dire que $\text{Mat}_B(q_1)$ et $\text{Mat}_B(q_2)$ sont congruentes.

Rq 28: C'est une relation d'équivalence: cherchons-en les classes.

A - ... sur un corps algébriquement clos

On suppose K algébriquement clos.

Prop 29: M est congruente à $\begin{pmatrix} I_{\text{rg}(M)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Cor 30: Les classes d'équivalence sont caractérisées par le rang.

En particulier, il n'existe qu'une classe non dégénérée, dont la forme quadratique de matrice I_n dans B est un représentant.

B - ... sur $\mathbb{R}$

Supposons que $K = \mathbb{R}$.

Def 31: On dit que q est positive (resp. négative) si $\forall x \in E \setminus \{0\}, q(x) \geq 0$ (resp. $q(x) \leq 0$). Si cette inégalité est stricte, alors on dit que q est définie positive (resp. définie négative).

Ex 32: Sur $\mathbb{R}^2$, $q: (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est définie positive, $q: (x, y) \mapsto x^2$ est positive non définie, et $q: (x, y) \mapsto xy$ est rien du tout.

[Rb]
475 Thm 33 (inégalité de CAUCHY-SCHWARZ): Si q est positive, alors pour tout $(x, y) \in E^2$, $q(x, y)^2 \leq q(x)q(y)$, avec égalité si (et seulement si lorsque q est définie positive) x et y sont colinéaires.

Cor 34: Si q est positive, alors q définie positive $\Leftrightarrow q$ non dégénérée.

[Rb]
477 Def 35: Notons $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{N}$) l'ensemble des sous-espaces F de E tels que $q|_F$ est définie positive (resp. définie négative). Posons $s = \max_{F \in \mathcal{P}} \dim(F)$ et $t = \max_{F \in \mathcal{N}} \dim(F)$ avec la convention $\max \emptyset = 0$.

Le couple (s, t) est appelé signature de q .

[Rb]
476 Thm 36 (loi d'inertie de SYLVESTER): Supposons que $\mathcal{B}$ est q -orthogonal. Alors $s = \#\{i \in [1, n] \mid q(e_i) > 0\}$ et $t = \#\{i \in [1, n] \mid q(e_i) < 0\}$.
En particulier, $s+t = \text{rg}(q)$ DEV 1.6

Cor 37: Les classes d'équivalence sont caractérisées par la signature.
En particulier, il y a $n+1$ classes non dégénérées.

C-... sur les corps finis

Soient $p \geq 3$ premier, $r \in \mathbb{N}^*$ et $q = p^r$. Supposons que $K = \mathbb{F}_q$. Soit $\alpha \in K$ qui n'est pas un carré.

[Rb]
480 Prop 38: M est congruente à $\begin{pmatrix} I_{\text{rg}(q)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou à $\begin{pmatrix} \overbrace{1 \dots 1}^{\text{rg}(q)} & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ } $\text{rg}(q)$.

[Rb]
481 Cor 39: Les classes non dégénérées sont caractérisées par le discriminant: il y en a donc 2. Il y a $2n+1$ classes au total.

[Rb]
431 - 434 Appli 40: Démonstration de la loi de réciprocité quadratique.

III - Isométries

Def 41: L'ensemble des isométries de (E, q) , appelé groupe orthogonal, est:
 $O(q) = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid q \circ u = q\}$

► L'ensemble des isométries directes de (E, q) , appelé groupe spécial orthogonal est $SO(q) = \{u \in O(q) \mid \det(u) = 1\}$.

Prop 42: $O(q)$ est un sous-groupe de $GL(E)$.

Prop 43: Soit $u \in GL(E)$ de matrice A dans $\mathcal{B}$. Alors $u \in O(q) \Leftrightarrow M = {}^t A M A$. [Gr] 319

Supposons q non dégénérée.

Def 44: Soit $u \in O(q)$. On dit que u est une réflexion (resp. un renversement) si $u^2 = \text{id}_E$ et $\dim(\text{Ker}(u + \text{id}_E)) = 1$ (resp. $\dim(\text{Ker}(u + \text{id}_E)) = 2$). [P] 125

Thm 45 (de CARTAN - DIEUDONNÉ): Toute isométrie peut s'écrire comme le produit d'au plus n réflexions. [P] 143

Lemme 46: Si $n \geq 3$, alors pour toutes réflexions σ_1 et σ_2 , il existe deux renversements τ_1 et τ_2 tels que $\sigma_1 \sigma_2 = \tau_1 \tau_2$. [P] 143

Thm 47: Si $n \geq 3$, alors toute isométrie directe est produit d'au plus n renversements. DEV 2 (cas euclidien) [P] 143

RÉFÉRENCES

- [Gr] Grifone (Rq: peut (presque) remplacer [Rb])
- [Rb] Rombaldi
- [P] Perrin