Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

I - De l'intersection d'hyperplans affines aux systèmes linéaires

[Rb] 451 **Thm 1** (Équation d'un s.e.v) :

- Si $(\varphi_1, \dots, \varphi_p) \in (E^*)^p$ est de rang r, alors $\bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}(\varphi_i)$ est de dimension $n-r$
- Réciproquement, si $F \leq E$ est de dimension $n-r$, alors il existe $(\varphi_1, \dots, \varphi_r) \in (E^*)^r$ libre telle que $F = \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(\varphi_i)$

[Rb] ~446 **Rq 2** : Pour simplifier les notations, plaçons nous dans $E = \mathbb{K}^n$.
Si $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan, alors $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid \varphi(e_1)x_1 + \dots + \varphi(e_n)x_n = 0\}$ (où $\{e_1, \dots, e_n\}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$). Un hyperplan est donc caractérisé par une équation, et d'après le théorème précédent, un sev. de E de dimension $n-r$ est caractérisé par r équations (à n inconnues).

Rq 3 : On a le même résultat pour des espaces et des hyperplans affines, mais avec des équations non homogènes.

[Bu] 318 **Def 4** : On appelle système linéaire un système de la forme :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{p,1}x_1 + \dots + a_{p,n}x_n = b_p \end{cases}$$

d'inconnues $x_1, \dots, x_n$, que l'on écrit $Ax = b$ de manière équivalente, où $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $b = {}^t(b_1 \cdots b_p) \in \mathbb{K}^p$ et $x = {}^t(x_1 \cdots x_n) \in \mathbb{K}^n$.

Rq 5 : Si $\mathcal{F} = a + F$ et $\mathcal{G} = b + G$ sont deux sous-espaces affines, alors :

$$\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \begin{cases} c + (F \cap G) & \text{si } c \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

Prop 6 : L'ensemble des solutions de $Ax = b$ est [Bu] 319

- vide si $b \notin \mathrm{Im}(A)$,
- un sous-espace affine dirigé par $\mathrm{Ker}(A)$ sinon.

Cor 7 : Si $b \in \mathrm{Im}(A)$, alors l'espace des solutions de $Ax = b$ est un espace affine de dimension $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = n - \mathrm{rg}(A)$ [Bu] 319
En particulier, si $\mathrm{rg}(A) = n$, alors il existe une unique solution.

DEV 1 : Par 5 points passe une conique.

- Elle est unique si, et seulement si 4 points parmi ces 5 ne sont pas alignés
- Elle est non dégénérée si, et seulement si 3 points parmi ces 5 ne sont pas alignés.

II - Résolution pratique d'un système linéaire [Bu] 315

A - Vocabulaire, opérations élémentaires

On note $L_1, \dots, L_p$ les lignes de A, et $C_1, \dots, C_n$ ses colonnes.

Def 8 : Soient $\alpha \in \mathbb{K}^\times$, $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

- On définit une matrice de dilatation $D_i(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \alpha & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{K})$.
- On définit une matrice de transvection $T_{i,j}(\alpha) = I_n + \alpha E_{i,j} \in GL_n(\mathbb{K})$.
- On définit une matrice de permutation $P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{1 \leq i,j \leq n} \in GL_n(\mathbb{K})$.

Def 9 : On définit les opérations élémentaires sur les colonnes :

- $C_i \leftarrow \alpha C_i$: on remplace C_i par αC_i
- $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$: on remplace C_i par $C_i + \alpha C_j$
- $C_i \leftrightarrow C_j$: on échange C_i et C_j

Thm 10 : On a les correspondances suivantes entre opérations élémentaires et multiplication matricielle :

- $D_i(\alpha)A \iff L_i \leftarrow \alpha L_i$
- $T_{i,j}(\alpha)A \iff L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$
- $P_{(i,j)}A \iff L_i \leftrightarrow L_j$
- $A D_i(\alpha) \iff C_i \leftarrow \alpha C_i$
- $A T_{i,j}(\alpha) \iff C_j \leftarrow C_j + \alpha C_i$
- $A P_{(i,j)} \iff C_i \leftrightarrow C_j$

Def 11 : On appelle :

- *pivot* de la ligne L_i le coefficient non nul le plus à gauche de L_i
- *matrice échelonnée* selon les lignes une matrice telle que :
  - si une ligne est nulle, alors les suivantes sont nulles
  - sinon, son pivot est strictement à droite de la ligne précédente.
- *matrice échelonnée réduite* selon les lignes une matrice échelonnée selon les lignes dont les pivots valent 1.

On donne les mêmes définitions selon les colonnes par transposition matricielle.

Ex 12 : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée réduite selon les lignes, $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée (non réduite) selon les colonnes (en bleu, les pivots).

B - Algorithme de Gauss & conséquences

Thm 13 : L'ensemble des solutions d'un système reste inchangé par opérations élémentaires.

Algo 14 (du pivot de Gauss) :

- Phase de triangulation : on élimine l'inconnue x_1 de L_2 avec des tranvections de L_2 par $L_3, \dots, L_p$, puis on élimine x_2 de L_3 avec des tranvections de L_3 par $L_4, \dots, L_p$, etc.
- Phase de remontée : on déduit de L_p la valeur de x_n, puis la valeur de x_{n-1} en injectant la valeur de x_n dans L_{p-1}, etc.
- Exception n°1 : si au cours de la phase de triangulation, l'une des lignes du système est réduite à $0=0$, alors on la retire du système. Si elle devient $0 = v \neq 0$, alors le système n'a pas de solution.
- Exception n°2 : si à la fin de la phase de triangulation, L_p contient plus d'une inconnue - disons $x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k}$ $(k \geq 1)$, alors on considère $x_{n+1}, \dots, x_{n+k}$ comme des paramètres, et on détermine $x_1, \dots, x_n$ en fonction de ces paramètres. Le système a alors une infinité de solutions.
- Exception n°3 : Lors de la phase de triangulation, si x_{k-1} est déjà absent de L_k, alors on échange L_k avec l'une des lignes suivantes contenant x_{k-1}. Si aucune des lignes suivantes ne contient x_{k-1}, alors on considère x_{k-1} comme un paramètre comme dans Exception n°2.

Appli 15 : Résolution de systèmes, calcul de déterminants, inverse, rang.

Cor 16 : Toute matrice est équivalente à une matrice échelonnée réduite

Cor 17 : $rg(A) = r \iff A$ est équivalente à $Diag(I_r, O_{n-r})$.

Cor 18 :
- Toute matrice inversible s'écrit sous la forme $P_\sigma T_1 \cdots T_p D_\alpha$ avec $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $T_1, \dots, T_p$ des matrices de transvection et D_α une matrice de dilatation de rapport α le déterminant de la matrice.
- Les matrices de transvections engendrent $SL_n(K)$.

[Bu] 321

C- Cas des systèmes de CRAMER

Def 19 : On dit que $Ax=b$ est un système de CRAMER si A est carrée et inversible.

Thm 20 : L'unique solution d'un système de CRAMER est donnée par :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad x_i = \frac{\det(C_1, \dots, C_{i-1}, b, C_{i+1}, \dots, C_n)}{\det(A)}$$

où $C_1, \dots, C_n$ désignent les colonnes de A.

Rq 21 : L'algorithme du pivot de GAUSS a une complexité en $O(n^3)$, alors que les formules de CRAMER sont en $O(n!)$. Leur intérêt est purement théorique pour $n>3$.

Ex 22 : • Soient $\omega>0$ et $f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Si $f'' + \omega^2 f \geq 0$, alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) + f(\frac{\pi}{\omega} x) \geq 0$.
• Méthode de variation des constantes

[C] 50

DEV 1 : $SO_2(\mathbb{F}_q) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z} & \text{si } -1 \text{ est un carré inversible modulo } q \\ \mathbb{Z}/(q+1)\mathbb{Z} & \text{sinon} \end{cases}$

III - Méthodes numériques pour la résolution des systèmes linéaires

Prop 23 : Soient $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. L'unique solution du système (de CRAMER) $Ax=b$ est l'unique minimum (global) de $u \mapsto \frac{1}{2}\langle Au|u\rangle - \langle b|u\rangle$. Celui-ci peut être approché par un algorithme de descente de gradient.

Thm 24 : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle qu'il existe $M \in GL_n(\mathbb{R})$ et $N \in$? telles que $A = M - N$. Si $\rho(M^{-1}N) < 1$, alors toute suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}$, $x_{k+1} = M^{-1}(Nx_k + b)$ converge vers une solution de $Ax=b$.

RÉFÉRENCES

[Rb]

[Bu]

[C] NH_2G_2 II