159 — Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

Dans cette leçon, K désigne un corps, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E est un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, et $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de E.

I- Formes linéaires, espace dual

A- Généralités sur les formes linéaires

[R] 441 **Def 1** : Une *forme linéaire* sur E est une application linéaire de E dans K. On note E^* l'ensemble des formes linéaires sur E, et on l'appelle *(espace) dual* de E.

[R] 441 **Ex 2** :
- Pour tout $x \in E$, il existe un unique $(e_1^*(x), \dots, e_n^*(x)) \in K^n$ tel que $x = e_1^*(x) e_1 + \dots + e_n^*(x) e_n$. L'application e_i^*, appelée i^e *application coordonnée*, est une forme linéaire sur E.
- Si $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E, alors pour tout $y \in E$, $\langle \cdot | y \rangle$ est une forme linéaire sur E.
- Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(K)$, $\mathrm{tr}(A \cdot)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(K)$
- Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en $a \in \mathbb{R}^n$, alors $df(a) \in (\mathbb{R}^n)^*$.
- Pour tout $\alpha \in K$, le morphisme d'évaluation en α est une forme linéaire sur $K_n[X]$, l'ensemble des polynômes de $K[X]$ de degré inférieur ou égal à n.

[R] ~445 **Prop 3** : Soit $H \leq E$.

H est un hyperplan $\Leftrightarrow$ H est le noyau d'une forme linéaire non nulle

[R] 441 **Cor 4** : Une forme linéaire non nulle est surjective.

B- Espace dual, base duale

[R] 442 **Prop/Def 5** : $\mathcal{B}^* = \{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ est une base de E^*, appelée *base duale* de $\mathcal{B}$. Plus précisément, $\forall \varphi \in E^*$, $\varphi = \sum_{k=1}^{n} \varphi(e_k) e_k^*$, i.e. $e_k^{**}(\varphi) = \varphi(e_k)$.

Ex 6 :
- La base duale de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est $\{(x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_i\}_{1 \leq i \leq n}$
- La base duale de la base canonique $\{E_{i,j}\}_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(K)$ est $\{\mathrm{tr}(E_{i,j} \cdot)\}_{1 \leq i,j \leq n}$.

Cor 7 : $\dim(E) = \dim(E^*)$, et $E^* \simeq E$.

Rq 8 : Cet isomorphisme n'est pas canonique, car il dépend du choix de $\mathcal{B}$.

Thm 9 (de représentation de Riesz) : Soit $(\mathcal{H}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert (on choisit, dans le cas complexe, l'antilinéarité à droite). [BMP] 103

$$\forall \varphi \in \mathcal{H}^*, \ \exists! v \in \mathcal{H} : \ \varphi = \langle \cdot | v \rangle$$

De plus, $\varphi \longmapsto v$ est une isométrie entre $\mathcal{H}^*$ et $\mathcal{H}$.

Rq 10 : Si E est euclidien ou hermitien, alors $y \longmapsto \langle \cdot | y \rangle$ est un isomorphisme canonique entre E et E^*.

Appli 11 : On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. On note $[x,y,z]$ le produit mixte de (x,y,z). Pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}^3)^2$, il existe un unique vecteur $x \wedge y$ tel que $[x,y,\cdot] = \langle \cdot | x \wedge y \rangle$, que l'on appelle *produit vectoriel* de x et y.

Ex 12 : Soit $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in K^n$ une famille de points deux à deux distincts. Pour $i \in [\![0,n]\!]$, posons $l_i = \prod_{j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$ et $\mathcal{B} = \{l_0, l_1, \dots, l_n\}$ la base de $K_n[X]$ des polynômes de Lagrange. La base duale de $\mathcal{B}$ est $\mathcal{B}^* = \{\mathrm{eval}_{a_0}, \dots, \mathrm{eval}_{a_n}\}$

Ex 13 : Supposons que $\mathrm{car}(K) = 0$. Fixons $a \in K$. Rappelons que : [R] ~442

$$\forall P \in K_n[X], \quad P = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a) \frac{(X-a)^k}{k!}$$

et cette écriture est unique, i.e. $\left\{\frac{(X-a)^k}{k!}\right\}_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $K_n[X]$. Sa base duale est $\{P \longmapsto P^{(k)}(a)\}_{0 \leq k \leq n}$.

[Go] 324 <u>Appli 14</u> : Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en $a \in \mathbb{R}^n$, alors il existe un unique vecteur $\nabla f(a)$, appelé gradient de f en a, tel que $df(a) = \langle \cdot \mid \nabla f(a) \rangle$

<u>Le cas particulier de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$</u> : Soit $n \geq 2$. DEV 1

[R] 458 <u>Thm 15</u> : $A \longmapsto tr(A\,\cdot)$ est un isomorphisme (canonique) entre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$.

<u>Prop 16</u> : Si $\varphi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$ vérifie $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\varphi(AB) = \varphi(BA)$, alors φ est colinéaire à la trace.

[C] 16-18 <u>Prop 17</u> :
- Tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible
- Tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contient une matrice orthogonale.

C - Espace bidual, base antéduale

[R] 445 <u>Def 18</u> : L'espace $E^{**} = (E^*)^*$ est appelé (espace) *bidual* de E.

[R] ~445 <u>Thm 19</u> :
$$\begin{aligned} eval : E &\longrightarrow E^{**} \\ x &\longmapsto [\varphi \longmapsto \varphi(x)] \end{aligned}$$
est un isomorphisme (canonique).

<u>Rq 20</u> : Ce n'est pas toujours vrai en dimension infinie !

[R] 443-444 <u>Prop 21</u> : Soit $\tilde{\mathcal{B}} = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ une base de E^*. Il existe une unique base $\mathcal{B}$ de E, appelée *base antéduale* de $\tilde{\mathcal{B}}$, dont $\tilde{\mathcal{B}}$ est la base duale.

II - Notion d'orthogonalité

A - Orthogonal d'une partie

<u>Notation 22</u> : Pour $\varphi \in E^*$ et $x \in E$, on pose $\langle \varphi, x \rangle_{E^*,E} = \varphi(x)$ (ou plus simplement $\langle \varphi, x \rangle$ s'il n'y a aucune ambiguïté). On appelle cette notation "*crochet de dualité*".

<u>Rq 23</u> : Cette notation n'est pas anodine : dans le cadre euclidien ou hermitien (hilbertien en général), si $\varphi = \langle \cdot \mid y \rangle$, alors $\varphi(x) = 0 \iff \langle x \mid y \rangle = 0$.

<u>Def 24</u> : [R] 447
- L'*orthogonal* de $A \subseteq E$ est $A^\perp = \{\varphi \in E^* \mid \forall x \in A, \langle \varphi, x \rangle = 0\}$
- L'*orthogonal* de $B \subseteq E$ est $B^\circ = \{x \in E \mid \forall \varphi \in B, \langle \varphi, x \rangle = 0\}$

<u>Prop 25</u> : [R] 447
- $A \longmapsto A^\perp$ et $B \longmapsto B^\circ$ sont décroissantes pour l'inclusion.
- $\forall A \subseteq E$, $A^\perp = Vect(A)^\perp$
- $\forall B \subseteq E^*$, $B^\circ = Vect(B)^\circ$

$\Big\}$ en particulier, ce sont des s.e.v.

<u>Prop 26</u> : [R] 448
- Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $(F^\perp)^\circ = F$ et :
$$\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E)$$
- Si F est un sous-espace vectoriel de E^*, alors $(F^\circ)^\perp = F$ et :
$$\dim(F) + \dim(F^\circ) = \dim(E)$$

<u>Cor 27</u> : $\forall F \leq E$, $F = E \iff F^\perp = \{0\}$.

<u>Thm 28</u> (Équation d'un s.e.v) : [R] 451
- Si $(\varphi_1, \dots, \varphi_p) \in (E^*)^p$ est de rang r, alors $\bigcap_{i=1}^{p} Ker(\varphi_i)$ est de dimension $n-r$
- Réciproquement, si $F \leq E$ est de dimension $n-r$, alors il existe $(\varphi_1, \dots, \varphi_r) \in (E^*)^r$ libre telle que $F = \bigcap_{i=1}^{r} Ker(\varphi_i)$

<u>Rq 29</u> : Pour simplifier les notations, plaçons nous dans $E = \mathbb{K}^n$. [R] ~446
Si $H = Ker(\varphi)$ est un hyperplan, alors $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid \varphi(e_1)x_1 + \dots + \varphi(e_n)x_n = 0\}$ (où $\{e_1, \dots, e_n\}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$). Un hyperplan est donc caractérisé par une équation, et d'après le théorème précédent, un sev. de E de dimension $n-r$ est caractérisé par un système de r équations (à n inconnues).

[R] 448 Prop 30 : Soient A et B deux sous-espaces vectoriels de E.

- $(A+B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$
- $(A\cap B)^\perp = A^\perp + B^\perp$

(Et on a les mêmes résultats pour l'orthogonalité dans E^*).

Application au calcul différentiel

[R] 444 Lemme 31 : $\forall (\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_r) \in (E^*)^{r+1}$, $\varphi \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_r) \Leftrightarrow \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(\varphi_i) \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$

[Rv] 372 Thm 32 (des extrema liés) :
Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $(f, g_1, \dots, g_r) \in C^1(U, \mathbb{R})^{r+1}$. Posons $\Gamma = \bigcap_{i=1}^{r} g_i^{-1}(\{0\})$.
Si $f_{|\Gamma}$ admet un extremum local en $a \in \Gamma$, et si $(dg_1(a), \dots, dg_r(a))$ est libre, alors il existe des réels (uniques) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ appelés *multiplicateurs de Lagrange*, tels que $df(a) = \lambda_1 dg_1(a) + \dots + \lambda_r dg_r(a)$.

B - Morphisme transposé

Dans ce paragraphe, F est un K-espace vectoriel de dimension finie p, et $u \in \mathcal{L}(E,F)$

[R] 452 Def 33 : Le *morphisme transposé* de u est ${}^t u : F^* \longrightarrow E^*$, $\varphi \longmapsto \varphi \circ u$.

Rq 34 : Avec la notation du crochet de dualité, ${}^t u$ est le morphisme vérifiant :
$$\forall \varphi \in F^*, \forall x \in E, \langle \varphi, u(x) \rangle_{F^*,F} = \varphi \circ u(x) = {}^t u(\varphi)(x) = \langle {}^t u(\varphi), x \rangle_{E^*,E}.$$

[R] ≈454 Rq 35 : Dans le cadre euclidien ou hermitien, la correspondance entre E et E^* traduit une correspondance entre ${}^t u$ et u^* (l'adjoint de u).

[R] 452 Prop 36 :
- $u \longmapsto {}^t u$ est linéaire injective de $\mathcal{L}(E,F)$ dans $\mathcal{L}(F^*, E^*)$.
- $\mathrm{Ker}({}^t u) = \mathrm{Im}(u)^\perp$
- $\mathrm{Im}({}^t u) = \mathrm{Ker}(u)^\perp$
- Si $v \in \mathcal{L}(F,G)$, alors ${}^t(v \circ u) = {}^t u \circ {}^t v$.

[R] 454 452 Prop 37 : Soient $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ des bases de E et de F. On a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F^*, \mathcal{B}_E^*}({}^t u) = {}^t \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u)$
En particulier, $\mathrm{rg}({}^t u) = \mathrm{rg}(u)$.

Prop 38 (formule de changement de base duale) : Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de E.
$$\mathrm{Pass}_{\mathcal{B}_2^*, \mathcal{B}_1^*} = {}^t \mathrm{Pass}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}$$

III - Application aux formes quadratiques réelles

Soient E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n > 0$, et q une forme quadratique sur E.

Thm 39 : Il existe une base q-orthogonale, que l'on peut déterminer avec l'algorithme de Gauss.

Thm 40 (loi d'inertie de Sylvester) : Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E orthogonale pour q. Quitte à renuméroter $\mathcal{B}$, supposons que $q(e_1) > 0, \dots, q(e_s) > 0$, $q(e_{s+1}) < 0, \dots, q(e_{s+t}) < 0$, $q(e_{s+t+1}) = \dots = q(e_n) = 0$. Le couple (s,t) ne dépend alors pas du choix de la base orthogonale : on l'appelle *signature* de q. [R] 476

DEV 2

Ex 41 : $q(a,b,c,d,e) =$

RÉFÉRENCES

[R] : Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie (Jean-Étienne Rombaldi) [2e édition].

[Go] : Les maths en tête - Algèbre et Probabilités (Xavier Gourdon) [3e édition]

[Go'] : Les maths en tête - Analyse (Xavier Gourdon) [3e édition]

[C] : Carnet de voyage en Algébrie (Philippe Caldero, Marie Peronnier)

[Rv] : Petit guide du calcul différentiel (François Rouvière) [4e édition]

[OMP] : Objectif Agrégation [2e édition]

[FGN] : Oraux X-ENS Algèbre 2 [2e édition]