Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

158

Dans cette leçon, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $A^* = {}^t\bar{A}$. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, soit $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E.

I - Généralités

A - Définitions et premières propriétés

[Go] 240-241 **Def 1** : ▸ $S_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA = A\}$ est l'ensemble des matrices réelles dites *symétriques*.

▸ $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA = -A\}$ est l'ensemble des matrices réelles dites *anti-symétriques*.

▸ $\mathcal{H}_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid {}^t\bar{A} = A\}$ est l'ensemble des matrices complexes dites *hermitiennes*.

▸ On dira que A est *auto-adjointe* si $A = A^*$, i.e. si $A \in S_n(\mathbb{R})$ ou $A \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$.

Ex 2 : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R})$, $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_2(\mathbb{C})$.

[Go] 240-241 **Prop 3** : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus i\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Def 4 : ▸ $S_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in S_n(\mathbb{R}) \mid \forall X \in \mathbb{R}^n, {}^tXAX \geq 0\}$ est l'ensemble des matrices symétriques réelles dites *positives*.

▸ $S_n^{++}(\mathbb{R}) = \{A \in S_n^+(\mathbb{R}) \mid \forall X \in \mathbb{R}^n, {}^tXAX = 0 \Rightarrow X = 0\}$ est l'ensemble des matrices symétriques réelles dites *définies positives*.

▸ $\mathcal{H}_n^+(\mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C}) \mid \forall X \in \mathbb{C}^n, {}^t\bar{X}AX \geq 0\}$ est l'ensemble des matrices hermitiennes dites *positives*.

▸ $\mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{H}_n^+(\mathbb{C}) \mid \forall X \in \mathbb{C}^n, {}^t\bar{X}AX = 0 \Rightarrow X = 0\}$ est l'ensemble des matrices hermitiennes dites *définies positives*.

B - Lien avec les formes quadratiques/hermitiennes

[Go] 240-241 **Def 5** : Soit $\varphi : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire. On dit que φ est *symétrique* si $\forall (x,y) \in E^2$, $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$. Le cas échéant, $q : x \in E \mapsto \varphi(x,x)$ est appelée *forme quadratique* associée à φ, et φ est appelée *forme polaire* associée à q (elle est alors unique).

Def 6 : Soit $\varphi : E^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ une forme sesquilinéaire (on prend l'antilinéarité à droite). On dit que φ est *hermitienne* si $\forall (x,y) \in E^2$, $\varphi(x,y) = \overline{\varphi(y,x)}$. Le cas échéant, $q : x \in E \mapsto \varphi(x,x)$ est appelée *forme hermitienne* associée à φ et φ est appelée *forme polaire* associée à q (elle est alors unique).

Ex 7 : ▸ $(f,g) \longmapsto \int_0^1 f\bar{g}$ est une forme sesquilinéaire hermitienne sur $C^0([0,1], \mathbb{C})$, et induit une forme bilinéaire symétrique sur $C^0([0,1], \mathbb{R})$. [Go] 233

▸ $(X,Y) \longmapsto {}^t\bar{X}Y$ est bilinéaire symétrique ou sesquilinéaire hermitienne sur $\mathbb{K}^n$.

Prop 8 : Soit $\varphi : E^2 \to \mathbb{K}$ bilinéaire ou sesquilinéaire. On définit la *matrice de φ dans $\mathcal{B}$* comme $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) := (\varphi(e_i, e_j))_{i,j}$. Pour x et y dans E, de vecteurs coordonnées X et Y, on a alors $\varphi(x,y) = {}^t\bar{X} \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) \cdot Y$ en identifiant $\mathbb{K}$ et $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{K})$. [Go] -241

▸ φ est symétrique si, et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) \in S_n(\mathbb{R})$

▸ φ est hermitienne si, et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) \in \mathcal{H}_n(\mathbb{R})$.

Prop 9 : Soit $\mathcal{B}'$ une autre base de E. Si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = {}^t\bar{P}AP$. [R] 463

Prop 10 : $\forall A \in S_n(\mathbb{R}) \cup \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{Sp}(A) \subseteq \mathbb{R}$.

II - Réduction des matrices symétriques/hermitiennes

A - Orthogonalité et théorème spectral

Soit q une forme quadratique ou hermitienne sur E, de forme polaire φ. On pose $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

Def 11 : On dit que $\mathcal{B}$ est *q-orthogonale* si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]$, $i \neq j \Rightarrow \varphi(e_i, e_j) = 0$, i.e. si A est diagonale. [Go] 243

Thm 12 (spectral) : Pour toute $M \in S_n(\mathbb{R})$ (resp. $M \in \mathcal{H}_n(\mathbb{R})$), il existe P orthogonale (resp. unitaire) (i.e. $P^{-1} = P^*$) telle que P^*MP est diagonale. [Go] 256

Thm 13 : Il existe une base q-orthogonale de E. DEV 1.a [Go] 243

Appli 14 : Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$.
- $A \in S_n^+(\mathbb{R}) \iff Sp(A) \subseteq \mathbb{R}^+$
- $A \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \iff Sp(A) \subseteq \mathbb{R}^{+*}$

Thm 15 (orthogonalisation simultanée) : **DÉV 1.b**
$\forall A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $\forall B \in S_n(\mathbb{R})$, $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$: ${}^tPAP = I_n$ et ${}^tPBP$ est diagonale.

Thm 16 : $\forall A \in S_n^+(\mathbb{R})$, $\exists! B \in S_n^+(\mathbb{R})$: $A = B^2$ (on note $B = \sqrt{A}$)

[C] 348 Thm 17 (décomposition polaire) : Toute matrice A (inversible) se décompose (de manière unique) sous la forme $A = \Theta S$, où $\Theta \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

B - Réduction de Gauss et signature d'une forme quadratique / hermitienne

[R] 469 Thm 18 (réduction de Gauss) : Il existe des formes linéaires $\ell_1, \dots, \ell_r$ linéairement indépendantes et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^r$ tels que $q = \lambda_1 |\ell_1|^2 + \dots + \lambda_r |\ell_r|^2$.

Ex 19 : $q(x,y,z) = x^2 + 2xy - yz + \frac{3}{4}z^2 = (x+y)^2 - (y + \frac{1}{2}z)^2 + z^2$

[R] 477 Thm 20 (loi d'inertie de Sylvester) : Supposons que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, soit $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base q-orthogonale de E. Les entiers $s = \#\{e_i \in \mathcal{B} \mid q(e_i) > 0\}$ et $t = \#\{e_i \in \mathcal{B} \mid q(e_i) < 0\}$ ne dépendent que de q. Le couple (s,t) est appelé signature de q.

Ex 21 : La forme quadratique de Ex 19 a pour signature $(2,1)$.

[R] 207 Cor 22 : Les orbites de l'action de $GL_n(\mathbb{R})$ sur $S_n(\mathbb{R})$ par congruence sont caractérisées par le rang et la signature.

III - Propriétés topologiques en lien avec $S_n(\mathbb{R})$

Déf 23 : Pour $A \in M_n(\mathbb{K})$, on pose $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$

Ex 24 : $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, $\exp(\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \mathrm{Diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$.

[C] 357 Thm 25 : $\exp : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme **DÉV 2**

IV - Applications

A - Vecteurs gaussiens

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On note $\langle \cdot | \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

Déf 26 : Un vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_n) : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ est un vecteur gaussien si pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, $\langle u | X \rangle$ suit une loi normale (réelle). [CR] 160 157 158
On note alors $X \sim \mathcal{N}_n(m, \Gamma)$ où $m = {}^t(\mathbb{E}[X_1] \cdots \mathbb{E}[X_n])$ est l'espérance de X, et $\Gamma = (\mathrm{Cov}(X_i, X_j))_{1 \leq i,j \leq n} \in S_n^+(\mathbb{R})$ sa matrice de covariance.

Ex 27 : Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$, alors $\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}_n(0, I_n)$. [CR] 160

Thm 28 : Une variable aléatoire X est gaussienne si, et seulement s'il existe $m \in \mathbb{R}^n$ et $\Gamma \in S_n^+(\mathbb{R})$ tels que : [CR] 160
$$\forall u \in \mathbb{R}^n, \quad \varphi_X(u) = \exp\left(i \langle m, u \rangle - \frac{1}{2} \langle \Gamma u, u \rangle\right)$$
Le cas échéant, m est l'espérance, et Γ sa matrice de covariance.

Cor 29 : La loi d'un vecteur gaussien est entièrement déterminée par son espérance et sa matrice de covariance.

Prop 30 : Si $X \sim \mathcal{N}_n(m, \Gamma)$, alors $\forall A \in M_{p,n}(\mathbb{R})$, $\forall b \in \mathbb{R}^p$, $AX + b \sim \mathcal{N}_p(Am + b, A\Gamma{}^tA)$ [CR] 161

Prop 31 : $\forall \Gamma \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $\exists C \in M_n(\mathbb{R})$: $\Gamma = {}^tCC$

Cor 32 : Pour tous $m \in \mathbb{R}^n$ et $\Gamma \in S_n(\mathbb{R})$, il existe un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}_n(m, \Gamma)$. [CR] 161

Thm 33 : Soient $m \in \mathbb{R}^n$, $\Gamma \in S_n^+(\mathbb{R})$ et $X \sim \mathcal{N}_n(m, \Gamma)$. [CR] 161
$$X \text{ est à densité} \iff \Gamma \in S_n^{++}(\mathbb{R})$$
Le cas échéant, $\forall u \in \mathbb{R}^n$, $f_X(u) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \det(\Gamma)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \langle \Gamma^{-1}(u-m) | u-m \rangle\right)$.

B - Optimisation des fonctions de plusieurs variables

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2

[Rv] 294 **Def 34** : On appelle (matrice) *hessienne de f en a* la matrice $\mathrm{Hess}_a(f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial e_i \partial e_j}(a)\right)_{1 \leq i,j \leq n}$

Rq 35 : $\mathrm{Hess}_a(f)$ est la matrice dans $\mathcal{B}$ de la forme bilinéaire $d^2 f(a)$: en particulier, pour tous $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ et $k = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $d^2 f(a)(h)(k) = {}^t h \cdot \mathrm{Hess}_a(f) \cdot k$.

[Go] 336 **Def 36** : On dit que a est un *point critique* si $df(a) = 0$.

[Go] 335-336 **Thm 37** :
- Si f admet un maximum (resp. un minimum) local en a, alors a est un point critique, et $\mathrm{Hess}_a(f)$ est négative (resp. positive).
- La réciproque est vraie si on suppose en plus $\mathrm{Hess}_a(f)$ définie

Algo 38 (de descente de gradient à pas fixe) : Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f \in C^1(\Omega, \Omega)$, $\alpha > 0$ et $x_0 \in \Omega$. La suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n - \alpha \nabla f(x_n)$ converge vers un $x^* \in \Omega$ vérifiant $\nabla f(x^*)$.

[BMP] 24-32 **Thm 39** : Soient $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. La solution de $Ax = b$ est donné par le minimum de $x \longmapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$, lequel peut être trouvé par descente de gradient.

RÉFÉRENCES

[R] : Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie (Jean-Étienne Rombaldi) [2e édition].

[Go] : Les maths en tête – Algèbre et Probabilités (Xavier Gourdon) [3e édition]

[C] : Carnet de voyage en Algèbre (Philippe Caldero, Marie Peronnier)

[CR] : Probabilités et statistiques pour l'épreuve de modélisation à l'agrégation de mathématiques (Marie-Line Chabanol, Jean-Jacques Ruch)