157

Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

Dans cette leçon, K désigne un corps, E est un K-espace vectoriel de dimension finie n, et $u \in \mathcal{L}(E)$.

I - Rappels sur l'étude des endomorphismes

[M²] 2 **Thm 1** (de structure) : L'application $\varphi_u : K[X] \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ qui à $P = \sum a_k X^k$ associe $P(u) := \sum a_k u^k$, est un morphisme de K-algèbres.

[M²] 3 4 **Prop/Def 2** : L'ensemble $I_u = \operatorname{Ker}(\varphi_u)$ des polynômes dits annulateurs de u, est un idéal de $K[X]$, appelé idéal annulateur de u. Il n'est pas réduit à $\{0\}$, et donc admet un unique générateur unitaire, noté μ_u, appelé polynôme minimal de u.

Rq 3 : Par correspondance entre $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{M}_n(K)$, ces résultats restent valables pour les matrices.

[M²] 54 **Def 4** : Le polynôme caractéristique de u est défini par $\chi_u = \det(X\,id_E - u)$.

[M²] 81 **Thm 5** (de Cayley-Hamilton) : $\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

[R] 605 644 **Prop 6** : $Sp(u) = \chi_u^{-1}(\{0\}) = \pi_u^{-1}(\{0\})$.

[M²] 55 **Prop 7** : Soit F un sous-espace vectoriel de E stable. Notons $u_F \in \mathcal{L}(F)$ l'endomorphisme induit par u sur F. Alors $\pi_{u_F} | \pi_u$ et $\chi_{u_F} | \chi_u$.

[M²] 18 55 **Prop 8** : Si $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$ est une décomposition de E en sous-espaces stables par u, alors $\chi_u = \chi_{u_{F_1}} \cdots \chi_{u_{F_r}}$ et $\pi_u = \pi_{u_{F_1}} \vee \cdots \vee \pi_{u_{F_r}}$.

[M²] 43 **Lemme 9** (des noyaux) : Soit $(P,Q) \in K[X]^2$. Si $P \wedge Q = 1$, alors :

$$\operatorname{Ker}(PQ(u)) = \operatorname{Ker}(P(u)) \oplus \operatorname{Ker}(Q(u))$$

II - Trigonalisation

Def 10 : On dit que u est trigonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire. [R] 675

Cor 11 : Si u est trigonalisable, alors $\begin{cases} tr(u) = \sum_{\lambda \in Sp(u)} m(\lambda)\lambda \\ \det(u) = \prod_{\lambda \in Sp(u)} \lambda^{m(\lambda)} \end{cases}$ [R] 676

Thm 12 : u est trigonalisable $\Leftrightarrow \pi_u$ est scindé $\Leftrightarrow$ il existe $P \in I_u$ scindé. [R] 676

Cor 13 : Sur un corps algébriquement clos, tout endomorphisme est trigonalisable. [R] 676

Ex 14 : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ est trigonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$.

Appli 15 : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(e^A) = e^{tr(A)}$. [R] 762

Prop 16 : Si F est un sous-espace vectoriel stable par u et si u est trigonalisable, alors $u_F : F \longrightarrow F$ est trigonalisable. [R] 676

Prop 17 : Si $A \in \mathcal{M}_n(K)$ s'écrit par blocs $\operatorname{Diag}(A_1, \dots, A_r)$, alors $\chi_A = \chi_{A_1} \cdots \chi_{A_r}$ et $\pi_A = \pi_{A_1} \vee \cdots \vee \pi_{A_r}$.

Prop 18 : Soit $v \in \mathcal{L}(E)$. Si u et v commutent, alors pour tout $\lambda \in Sp(u)$, $E_\lambda(u)$ est stable par v. [Go] 175

Thm 19 : Soit $(u_i)_{i\in I} \in \mathcal{L}(E)^I$ une famille d'endomorphismes qui commutent deux à deux. Si les u_i, $i \in I$, sont tous trigonalisables, alors ils le sont dans une même base (on dit qu'ils sont cotrigonalisables). [R] 678

Prop 20 : Soit $v \in \mathcal{L}(E)$. Si u et v sont cotrigonalisables, alors $u+v$ et $u \circ v$ sont trigonalisables. [Go] ~192

Ex 21 : ▸ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont trigonalisables, mais pas leur somme.

▸ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sont trigonalisables, mais pas leur produit.

III – Endomorphismes nilpotents

A – Définition, critères, propriétés

[Gr] 93 Def 22 : On dit que u est nilpotent s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
On définit alors l'indice (de nilpotence) de u comme $\min\{k \in \mathbb{N}^* \mid u^k = 0_{\mathcal{L}(E)}\}$

Ex 23 : La dérivation de $\mathbb{C}_n[X]$ est nilpotente d'indice $n+1$.

[Gr] ~192 Prop 24 : Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent. Si u et v commutent, alors $u+v$ et $u \circ v$ sont nilpotents

Thm 25 : Les assertions suivantes sont équivalentes :
▸ u est nilpotent ▸ $\chi_u = X^n$ ▸ $\exists k \in [\![1, n-1]\!] : \pi_u = X^p$
▸ u est trigonalisable et $Sp(u) = \{0\}$

Cor 26 : Si K est algébriquement clos, alors u est nilpotent $\Leftrightarrow Sp(u) = \{0\}$

Ex 27 : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas nilpotente, mais son spectre est $\{0\}$.

[C] 27-32 Thm 28 : Si $K = \mathbb{R}$, alors u est nilpotent $\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}^*,\ tr(u^k) = 0$.

Rq 29 : Si K est un corps fini, le résultat est faux : considérer $id_{(\mathbb{F}_p)^p}$.

Prop 30 : Si F est un sous-espace vectoriel stable par u et si u est nilpotent, alors $u_F : F \to F$ est nilpotent.

B – Réduction de JORDAN des endomorphismes nilpotents

[M²] 143 Notation 31 : Posons $J_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$: on l'appelle bloc de JORDAN d'ordre r.

Lemme 32 : Supposons u nilpotent d'indice p. Soit $x \notin \mathrm{Ker}(u^{p-1})$, posons $F_x = \mathrm{Vect}(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$.
▸ F_x est stable par u et $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est une base de F_x, [R] 678
▸ F_x admet un supplémentaire stable par u.

Thm 33 (réduction de Jordan) : Supposons u nilpotent. Il existe $d_1 \geq \dots \geq d_r$ et une base $\mathcal{B}$ de E tels que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{Diag}(J_{d_1}, \dots, J_{d_r})$.

Prop 34 : Posons $A = \mathrm{Diag}(J_{i_1}, \dots, J_{i_r})$. On a $\chi_A = \pi_A = X^{i_r}$, et A est nilpotente d'indice r.

C – Noyaux itérés et tableaux de Young

Prop 35 : La suite $(\mathrm{Ker}(u^k))_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante et stationnaire, et si on note $d_k = \dim(\mathrm{Ker}(u^k))$, on a : $\forall k \in \mathbb{N},\ d_{k+1} = d_k + \dim(\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u^k))$. [M²] 16

Prop 36 : $(d_{k+1} - d_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante (on dit que $(d_k)_{k \in \mathbb{N}}$ s'essouffle). [M²] 16

Prop 37 : $p = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \forall q \geq k,\ \mathrm{Ker}(u^q) = \mathrm{Ker}(k)\}$ est appelé caractère de u. [Gr] 93
Il vérifie $p < n$. Si u est nilpotent, alors p est aussi l'indice de nilpotence de u.

Def 38 : ▸ Le tableau de YOUNG associé une suite d'entiers $n_1 \geq \dots \geq n_r$ est le tableau à r lignes tel que la i^e ligne contient n_i cases (alignées à gauche). [M²] 147
▸ Le tableau de YOUNG d'un endomorphisme nilpotent est le tableau de YOUNG de $d_2 - d_1 \geq d_3 - d_2 \geq \dots \geq d_p - d_{p-1}$ avec les notations ci-dessus.

Ex 39 : FIGURE 1

<u>Prop 40</u> : Soit $d_1 \geq \dots \geq d_r$. La matrice par bloc $\mathrm{Diag}(J_{d_1}, \dots, J_{d_r})$ est nilpotente d'indice d_1.

[M²] 147 <u>Construction du tableau de Young à partir de la réduite de Jordan</u> : FIGURE2

[M²] 148 <u>Thm 41</u> : Deux endomorphismes nilpotents sont semblables si, et seulement si ils ont la même réduction de Jordan.

<u>Cor 42</u> : Il y a autant de classes de similitude de matrices nilpotentes que de partitions de n.

IV – Décomposition de Dunford et applications

Dans cette section, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

[R] 613 <u>Thm 43</u> (décomposition de Dunford) : Si χ_u est scindé, alors il existe un unique $(d,n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que d est diagonalisable, n est nilpotent, d et n commutent, et $u = d+n$. De plus, $(d,n) \in K[u]^2$.

[R] 634 <u>Appli 44</u> : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que χ_A est scindé. Soit $A = D + N$ sa décomposition de Dunford. Il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $P^{-1} D P = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. On a alors :

$$e^A = P \,\mathrm{Diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})\, P^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{N^k}{k!}$$

DEV 1

<u>Ex 45</u> : $\exp\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp(I_3 + J_3) = \begin{pmatrix} e & e & e/2 \\ 0 & e & e \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

<u>Appli 46</u> : $\{ Y \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{K}^n) \mid Y' = AY \} = \{ t \mapsto e^{tA} Y_0 \ : Y_0 \in \mathbb{K}^n \}$.

[M²] 154 <u>Thm 47</u> (critère de Klarès) : Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable, alors u est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{ad}_u : v \in \mathcal{L}(E) \mapsto u\circ v - v \circ u$ l'est. DEV2

Références

[Gr] : Algèbre linéaire (Joseph Grifone) [6e édition, 2e version]

[M²] : Algèbre linéaire. Réduction des endomorphismes (Roger Mansuy, Rached Mneimné) [3e édition]

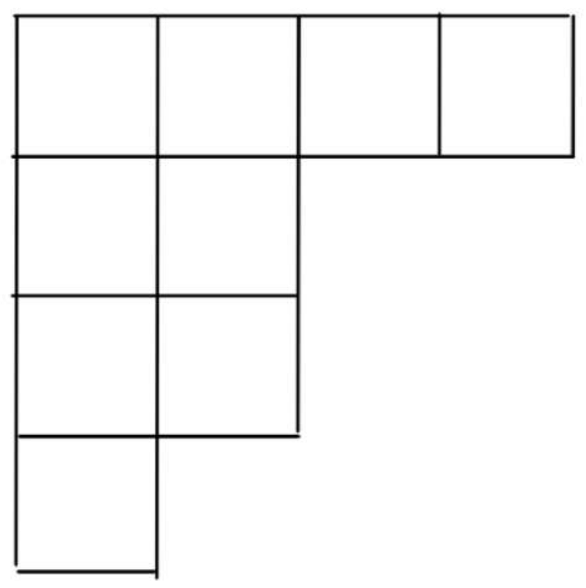
[R] : Mathématiques pour l'agrégation – Algèbre et géométrie (Jean-Étienne Rombaldi) [2e édition].

[Go] : Les maths en tête – Algèbre et Probabilités (Xavier Gourdon) [3e édition]

[C] : Carnet de voyage en Algèbre (Philippe Caldero, Marie Peronnier)

FIGURE 1 : Tableaux de Young

- Associé à la suite d'entiers $(4,2,2,1)$:



- Pour un endomorphisme tel que $d_1 = 2$, $d_2 = 4$, $d_3 = 5$, $d_4 = 6 = d_5 = d_6 = \dots$

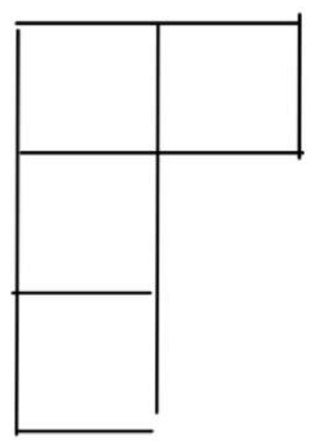


FIGURE 2 : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & & & & \\ & & & 0 & 1 & & & & & \\ & & & & 0 & & & & & \\ & & & & & 0 & 1 & & & \\ & & & & & & 0 & 1 & & \\ & & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$

On a $rg(A) = 7$ et $d_1 = \dim(\mathrm{Ker}(A)) = 3$

Ensuite, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & & & & & & \\ & 0 & 0 & 1 & & & & & & \\ & & 0 & 0 & & & & & & \\ & & & 0 & & & & & & \\ & & & & 0 & & & & & \\ & & & & & 0 & 0 & 1 & & \\ & & & & & & 0 & 0 & & \\ & & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$

On a $rg(A) = 3$ et $d_2 = \dim(\mathrm{Ker}(A^2)) = 7$.

Ensuite, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & & & & & & \\ & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ & & 0 & 0 & & & & & & \\ & & & 0 & & & & & & \\ & & & & 0 & & & & & \\ & & & & & 0 & & & & \\ & & & & & & 0 & & & \\ & & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$

On a $rg(A) = 1$ et $d_3 = \dim(\mathrm{Ker}(A^2)) = 9$.
Puis $A^3 = 0$. On a donc le tableau de Young suivant :