Exponentielle de matrices. Applications.

156

Dans cette leçon, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}^*$ et $(A,B)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. On fixe une norme d'algèbre $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On suppose connu et maîtrisé le calcul matriciel élémentaire.

[Rb 761] Thm/Def 1 : La série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{A^k}{k!}$ converge normalement sur tout compact. Sa somme est appelée *exponentielle* de A, et est notée $\exp(A)$ ou e^A.

[Rb 761] Ex 2 : $\forall(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$, $\exp(\mathrm{Diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)) = \mathrm{Diag}(e^{\lambda_1},\dots,e^{\lambda_n})$
En particulier, $\exp(0_n) = I_n$ et $\exp(I_n) = e\cdot I_n$.

Ex 3 : $\forall\theta\in\mathbb{R}$, $R(\theta) := \begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix} = \exp\left(\begin{pmatrix}0 & -\theta\\ \theta & 0\end{pmatrix}\right)$

I - Propriétés algébriques de l'exponentielle matricielle

Prop 4 : Si A et B commutent, alors $\exp(A+B)=\exp(A)\exp(B)$ (Rq : la réciproque est vraie !) et $\exp(A)$ et $\exp(B)$ commutent.

Cex 5 : $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ ne commutent pas, et
$$e^Ae^B=\begin{pmatrix}e&e\\0&1/e\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}e&1/e\\0&1/e\end{pmatrix}=e^Be^A$$

Cor 6 : $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))\subseteq GL_n(\mathbb{K})$, et $\exp(A)^{-1}=\exp(-A)$

[Rb 761 762] Prop 7 :
- $\forall P\in GL_n(\mathbb{K})$, $P\exp(A)P^{-1}=\exp(PAP^{-1})$
- ${}^t\exp(A)=\exp({}^tA)$
- $\det(\exp(A))=e^{\mathrm{Tr}(A)}$
- $\overline{\exp(A)}=\exp(\overline{A})$

Cor 8 : $\exp(\mathcal{A}_n(\mathbb{K}))\subseteq O_n(\mathbb{K})$ $(\mathcal{A}_n(\mathbb{K})=\{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\mid {}^tM=-M\})$

Rq 9 : On peut montrer que $\exp(\mathcal{A}_n(\mathbb{R}))=SO_n(\mathbb{R})$.

Prop 10 : Si A est diagonalisable, alors $\mathrm{Sp}(\exp(A))=\exp(\mathrm{Sp}(A))$.

Thm 11 :
- $\exp(A)\in\mathbb{K}_{n-1}[A]$ et commute avec A.
- Si A est diagonalisable et $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, alors $A\in\mathbb{R}_{n-1}[\exp(A)]$

Rq 12 : Pour $A=\begin{pmatrix}0&0\\0&2i\pi\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, on a $\exp(A)=I_2$ donc pour tout $P\in\mathbb{C}[X]$, $P(\exp(A))=P(1)I_2\neq A$.

II - L'exponentielle d'une matrice en pratique

A - Quelques méthodes de calcul

Prop 13 : Supposons A diagonalisable. Il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$ et $P\in O_n(\mathbb{K})$ tels que $A=P\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}P^{-1}$; alors $\exp(A)=P\begin{pmatrix}e^{\lambda_1}&&\\&\ddots&\\&&e^{\lambda_n}\end{pmatrix}P^{-1}$.

Thm 14 (décomposition de Dunford) : Si A est trigonalisable, alors il existe un unique $(D,N)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ tel que D est diagonalisable, N est nilpotente, D et N commutent, et $A=D+N$. De plus, $(D,N)\in\mathbb{K}[A]^2$. [Rb 613]

Prop 15 : Si A est nilpotente d'indice r, alors $\exp(A)=\sum_{k=0}^{r-1}\frac{A^k}{k!}$.

Prop 16 : Si A est trigonalisable, et si $A=D+N$ est la décomposition de Dunford de A, alors $e^A=e^D+e^D(e^N-I_n)$. En particulier, e^D est diagonalisable et $e^D(e^N-I_n)$ est nilpotente, et ce sont les éléments de la décomposition de Dunford de e^A. [Rb 765]

Prop 17 : $(I_n+\frac{A}{k})^k\longrightarrow\exp(A)$ [Rb 778]

Rq 18 : Cela fournit une méthode pour approcher numériquement l'exponentielle d'une matrice, toutefois bien moins efficace qu'un calcul direct.

B - Application : résolution d'EDO linéaires à coefficients constants

Prop 19 : $t\longmapsto e^{tA}$ est lisse sur $\mathbb{R}$, de dérivée $t\longmapsto Ae^{tA}=e^{tA}A$. [Gr 378]

Prop 20 : L'unique solution du problème de Cauchy $\{Y'=AY,\ Y(t_0)=Y_0$ $(t_0\in\mathbb{R},\ Y_0\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$ est $t\longmapsto e^{(t-t_0)A}Y_0$. [Gr ~378]

Ex 21 : Le problème de Cauchy $\{Y'=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}Y\ ;\ Y(0)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, admet pour (unique) solution $t\longmapsto\exp\left(t\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=e^t\begin{pmatrix}1&t\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=e^t\begin{pmatrix}t\\1\end{pmatrix}$.

[Rv] 306

<u>Prop 22</u> (formule de DUHAMEL) : Soient $B : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ continue, $t_0 \in \mathbb{R}$ et $Y_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. L'unique solution du problème de CAUCHY $\{Y' = AY + B \,;\, Y(t_0) = Y_0$ est :

$$t \longmapsto e^{(t-t_0)A} Y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} B(s)\,ds$$

III – Propriétés analytiques de l'exponentielle matricielle

A – Injectivité, surjectivité

[Rb] 769 <u>Thm 23</u> : L'application $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est surjective, non injective.

<u>Cex 24</u> : $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\exp(2i\pi k I_n) = I_n$

<u>Thm 25</u> : L'application $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ n'est ni surjective, ni injective.

Plus précisément :
- $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \{M^2 : M \in GL_n(\mathbb{R})\} \neq GL_n(\mathbb{R})$,
- Ex 3 justifie la non-injectivité.

<u>Rq 26</u> : Comme $\det(\exp(A)) = e^{\mathrm{Tr}(A)} > 0$, on a $\det^{-1}(\mathbb{R}^-) \cap \exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \emptyset$.

[Rb] ~768 777 <u>Prop 27</u> :
- Notons $\mathcal{N}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'application $\exp : \mathcal{N}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ est injective.
- Notons $\Delta_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'application $\exp : \Delta_n(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ est injective.

[Rb] 777 <u>Appli 28</u> : $\exp(A)$ est diagonalisable si, et seulement si A l'est. DEV1

[C] 357 <u>Thm 29</u> : L'application $\exp : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

[Rb] 766 -768 <u>Thm/Def 30</u> : Si $A \in B(I_n, 1)$, alors $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{A^n}{n}$ converge normalement sur tout compact. Sa somme est notée $\ln(I_n + A)$, et est appelée *logarithme de A*.

<u>Rq 31</u> : On a $\ln(I_n) = 0_n$.

<u>Thm 32</u> [admis] : L'application $\exp : \mathcal{N}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow I_n + \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ est une bijection de réciproque $\ln$.

B – Régularité

<u>Thm 33</u> [admis] : exp est lisse sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

<u>Prop 34</u> : La différentielle de exp en $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est :

$$d(\exp)(X) : H \longmapsto \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[\cdot, X]^n}{(n+1)!} \right)(H)$$

où $[\cdot, X] : H \longmapsto [H, X] = HX - XH$ DEV2

<u>Cor 35</u> : exp induit un C^1-difféomorphisme local d'un voisinage de 0_n sur un voisinage de I_n.

<u>RÉFÉRENCES</u>

[Rb]

[C] NH_2G_2 I

[Gr]

[Rv]