155

Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

Dans cette leçon, K désigne un corps, E est un K-espace vectoriel de dimension finie n, et $u \in \mathcal{L}(E)$.

I - Rappel des prérequis théoriques

[M²] 51 **Def 1** : On dit que $\lambda \in K$ est une *valeur propre* de u si $E_\lambda := \mathrm{Ker}(\lambda\, id_E - u)$ n'est pas réduit à $\{0_E\}$. L'espace E_λ est appelé *sous-espace propre* associé à λ, et ses éléments non nuls sont appelés *vecteurs propres* associés à λ. On note $Sp(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u.

[M²] 53 **Thm 2** : Les sous-espaces propres sont en somme directe.

[M²] 2 **Thm 3** (de structure) : L'application $\varphi_u : K[X] \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ qui à $P = \sum a_k X^k$ associe $P(u) := \sum a_k u^k$, est un morphisme de K-algèbres.

[M²] 3 4 **Prop/Def 4** : L'ensemble $I_u = \mathrm{Ker}(\varphi_u)$ des polynômes dits *annulateurs de u* est un idéal de $K[X]$, appelé *idéal annulateur de u*. Il n'est pas réduit à $\{0\}$, et donc admet un unique générateur unitaire, noté μ_u, appelé *polynôme minimal de u*.

Rq 5 : Par correspondance entre $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{M}_n(K)$, ces résultats restent valables pour les matrices.

[M²] 54 **Def 6** : Le *polynôme caractéristique* de u est $\chi_u := \det(X id_E - u)$.

[M²] 81 **Thm 7** (de Cayley - Hamilton) : $\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

[R] 606 644 **Prop 8** : $Sp(u) = \chi_u^{-1}(\{0\}) = \pi_u^{-1}(\{0\})$.

[M²] 55 ? **Prop 9** : Soit F un sous-espace vectoriel de E stable. Notons $u_F \in \mathcal{L}(F)$ l'endomorphisme induit par u sur F. Alors $\pi_{u_F} \mid \pi_u$ et $\chi_{u_F} \mid \chi_u$.

Prop 10 : Si $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$ est une décomposition de E en sous-espaces stables par u, alors $\chi_u = \chi_{u_{F_1}} \cdots \chi_{u_{F_r}}$ et $\pi_u = \pi_{u_{F_1}} \vee \cdots \vee \pi_{u_{F_r}}$. [M²] 55 18

Thm 11 : Écrivons $\chi_u = \prod_{\lambda \in Sp(u)} (X-\lambda)^{m(\lambda)}$. On a $\forall \lambda \in Sp(u)$, $1 \leq \dim(E_\lambda) \leq m(\lambda)$ [M²] 84

Lemme 12 (des noyaux) : Soit $(P,Q) \in K[X]^2$. Si $P \wedge Q = 1$, alors : [M²] 43

$$\mathrm{Ker}(PQ(u)) = \mathrm{Ker}(P(u)) \oplus \mathrm{Ker}(Q(u))$$

Ex 13 : Soit p un projecteur de E. Le polynôme $X^2 - X = X(X-1)$ annule p, et $X \wedge (X-1) = 1$ donc $\mathrm{Ker}(0_{\mathcal{L}(E)}) = \mathrm{Ker}(X(X-1)(p)) = \mathrm{Ker}(X(p)) \oplus \mathrm{Ker}((X-1)(p))$, autrement on retrouve le fait que $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p - id_E)$. En particulier, p agit comme une homothétie sur ces sous-espaces, donc la matrice de p dans une base adaptée à la décomposition est diagonale...

II - Diagonalisation d'un endomorphisme

Def 14 : On dit que u est *diagonalisable* s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale. (Le cas échéant, cette diagonale est constituée des valeurs propres de u, comptées avec leur multiplicité dans χ_u)

A - Critères de diagonalisabilité

Thm 15 : Les assertions suivantes sont équivalentes : [R] 683

1▸ u est diagonalisable 2▸ π_u est scindé sur K à racines simples 3▸ $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda$

4▸ Il existe un polynôme scindé à racines simples annulant u

χ_u est scindé sur K (écrivons-le $\prod_{\lambda \in Sp(u)} (X-\lambda)^{m(\lambda)}$) et $\forall \lambda \in Sp(u)$, $\dim(E_\lambda) = m(\lambda)$.

Rq 16 : Le choix de K influence fortement la diagonalisabilité : considérer $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, qui est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, mais pas sur $\mathbb{R}$.

[R] 683 **Ex 17** : ▸ Si $\#Sp(u) = n$, alors u est diagonalisable

▸ Si $\#Sp(u) = 1$, alors u est diagonalisable $\Leftrightarrow$ u est une homothétie

[M²] 91 ▸ Les projecteurs et les symétries sont diagonalisables.

▸ Si u est diagonalisable et nilpotent, alors u est nul.

[R] 704 ▸ Si $rg(u) = 1$, alors u est diagonalisable $\Leftrightarrow$ $tr(u) \neq 0$.

[Go] 188 **Thm 18** : Si $K = \mathbb{F}_q$ (le corps fini à q éléments), alors u est diagonalisable si, et seulement si $u^q = u$.

[M²] 93 **Prop 19** : Soit $F \leq E$ stable par u. Si u est diagonalisable, alors u_F aussi.

[Go] 175 **Prop 20** : Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ qui commute avec u. Les sous-espaces de E stables par u sont stables par v.

[R] 684 **Thm 21** : Soit $(u_i)_{i \in I} \in \mathcal{L}(E)^I$ une famille d'endomorphismes qui commutent deux à deux. Si les u_i, $i \in I$ sont tous diagonalisables, alors ils le sont dans une même base (on dit qu'ils sont codiagonalisables).

Ex 22 : Si $car(K) \neq 2$, alors $GL_n(K) \simeq GL_m(K) \Leftrightarrow n = m$.

C – Théorèmes spectraux

Dans ce paragraphe, E est un espace euclidien ou hermitien, muni d'un produit scalaire (hermitien) $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Le corps $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

[R] 718 **Def 23** : L'adjoint de u est l'unique application linéaire u^* vérifiant :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \langle u(x) | y \rangle = \langle x | u^*(y) \rangle$$

Rq 24 : Dans le cadre matriciel, $A^* = {}^t\bar{A}$.

[R] 732 743 **Def 25** : ▸ On dit que u est *auto-adjoint* si $u = u^*$. (Rq : dans le cadre réel, on dira aussi "*symétrique*", et dans le cas complexe, "*hermitien*".)

▸ On dit que u est *normal* si u et u^* commutent.

Prop 26 : u est auto-adjoint si, et seulement si sa matrice dans une base orthonormale est auto-adjointe. [R] 732

Ex 27 : ▸ Toute matrice diagonale est auto-adjointe.

▸ Une matrice anti-symétrique (ou anti-hermitienne) est normale, mais pas auto-adjointe.

▸ Si u conserve le produit scalaire (on dit alors que u est orthogonal dans le cas réel, et unitaire dans le cas complexe), alors u est inversible, et $u^{-1} = u^*$. En particulier, u est normal. De même, toute isométrie est normale.

Lemme 28 : Soit $F \leq E$. Si F est stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u et par u^*. [R] 743

Thm 29 (Réduction des endomorphismes normaux) : Supposons u normal. [G] 270

▸ Cas complexe : u admet une base orthonormale de diagonalisation.

▸ Cas réel : il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que : [R] 745

$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} D & & & \\ & R_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & R_p \end{pmatrix}, \quad D \text{ diagonale}, \quad R_k = \begin{pmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix}, \ b_k \neq 0$$

Lemme 30 : Les valeurs propres d'une matrice auto-adjointe sont réelles, et ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux. [M²] 125

Thm 31 (spectral) : Si u est auto-adjoint, alors u est diagonalisable dans une base orthonormale. [R] 739

Rq 32 : Dans le cas matriciel : si A est auto-adjointe, alors il existe $P \in O_n(\mathbb{K})$ telle que ${}^tPAP$ est diagonale. [R] 735

[R] 739 **Thm 33** : Pour tout $A \in S_n^+(\mathbb{R})$, il existe une unique $B \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$. On note $B = \sqrt{A}$, et on l'appelle racine carrée de A. De plus, si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

III - Applications

A - Décomposition de Dunford

[R] 613 **Thm 34** (décomposition de Dunford) : Si χ_u est scindé, alors il existe un unique $(d,n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que d est diagonalisable, n est nilpotent, d et n commutent et $u = d+n$. De plus, $(d,n) \in K[u]^2$. DEV 1

[R] 634 **Appli 35** : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est diagonalisable $\Leftrightarrow$ e^A est diagonalisable.

[R] 765 **Appli 36** : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que χ_A est scindé, soit $A = D+N$ sa décomposition de Dunford. Il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $P^{-1}DP = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. On a alors $e^A = P\,\mathrm{Diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})\,P^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{N^k}{k!}$

Ex 37 : $\exp\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \exp\left(I_3 + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} e & e & e/2 \\ 0 & e & e \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$

Appli 38 : $\{Y \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{K}^n) \mid Y' = AY\} = \{t \mapsto e^{tA} Y_0 : Y_0 \in \mathbb{K}^n\}$.

Thm 39 (critère de Klarès) : Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable, alors u est diagonalisable si, et seulement si $\mathrm{ad}_u : v \in \mathcal{L}(E) \mapsto u \circ v - v \circ u$ l'est.

DEV2

B - Conséquences topologiques

Notons $\Delta_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices diagonalisables (resp. trigonalisables) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Prop 39 : $M \mapsto \chi_M$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. [C] 47

(Rq : ce n'est pas le cas de $M \mapsto \pi_M$).

Prop 40 : $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ [C] 47

Cor 41 : L'ensemble des matrices nilpotentes est fermé.

Prop 42 : ▸ $\overline{\Delta_n(\mathbb{C})} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ▸ $\overline{\Delta_n(\mathbb{R})} = \mathcal{T}_n(\mathbb{R}) = \overline{\mathcal{T}_n(\mathbb{R})}$ [R] ? 685 686

RÉFÉRENCES

[M²] : Algèbre linéaire. Réduction des endomorphismes (Roger Mansuy, Rached Mneimné) [3e édition]

[R] : Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie (Jean-Étienne Rombaldi) [2e édition].

[Go] : Les maths en tête - Algèbre et Probabilités (Xavier Gourdon) [3e édition]

[C] : Carnet de voyage en Algébrie (Philippe Caldero, Marie Peronnier)