154 — Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Soient K un corps commutatif, E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit F un sous-espace vectoriel de E.

I - Stabilité d'un sous-espace par un endomorphisme

A - Introduction

$[M^2]$ 17 Def 1 : On dit que F est stable par u (ou u-stable) si $u(F) \subseteq F$.

$[M^2]$ 17 Ex 2 :
- $\{0\}$, $\mathrm{Ker}(u)$, $\mathrm{Im}(u)$ et E sont stables par u.
- $\forall P \in K[X]$, $\mathrm{Ker}(P(u))$ et $\mathrm{Im}(P(u))$ sont stables par u.

$[M^2]$ 17 Prop 3 : Soit $v \in \mathcal{L}(E)$. Si v commute avec u, alors pour tout $P \in K[X]$, $\mathrm{Ker}(P(u))$ et $\mathrm{Im}(P(u))$ sont stables par u.

Rq 4 : En particulier, $\forall \lambda \in K$, $E_\lambda(u) := \mathrm{Ker}(u - \lambda id_E)$ est stable par u, et par tout endomorphisme qui commute avec u.

$[M^2]$ ~17 Prop 5 : Soit $E = F \oplus G$ une décomposition de E, soit $\mathcal{B}$ une base de E adaptée à cette décomposition, notons $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ par blocs. Alors F (resp. G) est stable par u si, et seulement si $C = 0$ (resp. $B = 0$).

$[M^2]$ ~120 Cor 6 : F est stable par u si, et seulement si $F^\perp$ est stable par ${}^t u$ (Rq : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}^*}({}^t u) = {}^t \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$).

B - Notion d'endomorphisme induit

$[M^2]$ 17 Def 7 : Si F est stable par u, alors on dispose de l'endomorphisme induit par u sur F : $u_F : F \longrightarrow F$, $x \longmapsto u(x)$.

$[M^2]$ 53 18 Prop 8 : Si F est stable par u, alors $\chi_{u_F} \mid \chi_u$ et $\pi_{u_F} \mid \pi_u$.

$[M^2]$ 93 Cor 9 : Si F est stable par u et si u est diagonalisable (resp. trigonalisable, resp. nilpotent), alors u_F aussi.

Prop 10 : Si $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$ est une décomposition de E en somme de sous-espaces stables, alors : $[M^2]$ 55 18

$$\chi_u = \chi_{u_{F_1}} \cdots \chi_{u_{F_p}} \quad \text{et} \quad \pi_u = \pi_{u_{F_1}} \vee \dots \vee \pi_{u_{F_p}}.$$

II - Application à la réduction des endomorphismes

Lemme 11 (des noyaux) : $[M^2]$ 43

$\forall (P, Q) \in K[X]^2$, $P \wedge Q = 1 \Rightarrow \mathrm{Ker}((PQ)(u)) = \mathrm{Ker}(P(u)) \oplus \mathrm{Ker}(Q(u))$

A - Diagonalisation, trigonalisation

Thm 12 (de Cayley-Hamilton) : $\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ $[M^2]$ 81

Cor 13 : $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} \mathrm{Ker}((u - \lambda id_E)^{\mu_{\chi_u}(\lambda)})$ est une décomposition de E en somme de sous-espaces stables.

Prop 14 : Écrivons $\chi_u = \prod_{\lambda \in Sp(u)} (X - \lambda)^{m(\lambda)}$ et posons $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(\lambda id_E - u)$. $[M^2]$ 84
Pour tout $\lambda \in Sp(u)$, $1 \leq \dim(E_\lambda(u)) \leq m(\lambda)$.

Thm 15 : $[Rb]$ 683 $[M^2]$ 90-93
- u est diagonalisable $\Leftrightarrow$ π_u est scindé à racines simples
  $\Leftrightarrow$ il existe P annulateur de u scindé à racines simples
  $\Leftrightarrow$ χ_u est scindé et $\forall \lambda \in Sp(u)$, $\dim(E_\lambda(u)) = \mu_{\chi_u}(\lambda)$
- u est trigonalisable $\Leftrightarrow$ χ_u est scindé $\Leftrightarrow$ il existe un polynôme scindé qui annule u $[Rb]$ 676 $[M^2]$ 105-106

[M²] 94 107 Thm 16 (de réduction simultanée) : Soit $(u_i)_{i\in I} \in \mathcal{L}(E)^I$ une famille d'endomorphismes qui commutent deux à deux. Si tous les u_i, $i \in I$ sont diagonalisables (resp. trigonalisables), alors il existe une base de E qui diagonalise (resp. trigonalise) simultanément tous les u_i, $i \in I$.

[Rb] 743 Lemme 17 : Il existe un sous-espace de E de dimension 1 ou 2 stable par u.

B – Cas des endomorphismes normaux

Dans l'encadré suivant, on suppose u normal. DEV 1

[Rb] 743 Lemme 18 : Si F est un sous-espace de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u.

[Rb] 744 Lemme 19 : Il existe des sous-espaces $P_1, \dots, P_r$ de E stables par u, de dimension 1 ou 2, deux à deux orthogonaux, tels que $E = P_1 \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} P_r$.

[Rb] 745 Lemme 20 : Si $n := \dim(E) = 2$, alors : (Pas DEV)

- Si u admet une valeur propre réelle, alors u est diagonalisable dans une base orthonormée,
- Sinon, pour toute base orthonormée $\mathcal{B}$ de E, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $b \neq 0$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

[Rb] 745 Thm 21 (de réduction des endomorphismes normaux) : Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que, par blocs, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{Diag}(D_p, R_1, \dots, R_r)$, où $D_p \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est diagonale, $\forall i \in [\![1,r]\!]$, $\exists (a_i, b_i) \in \mathbb{R}^2 : b_i \neq 0$ et $R_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}$ et $p + 2r = n$.

[Rb] 746 (734) Cor 22 (théorème spectral) : Tout endomorphisme auto-adjoint se diagonalise dans une base orthonormée.

Cor 23 : Si u est orthogonal, alors il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme, par blocs : [Rb] 727

$$\begin{pmatrix} I_p & & & & \\ & -I_q & & & \\ & & R_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & R_r \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad R_k = \begin{pmatrix} \cos(\theta_k) & -\sin(\theta_k) \\ \sin(\theta_k) & \cos(\theta_k) \end{pmatrix}$$

Prop 24 : Si u est une rotation et que $\dim(E)$ est impaire, alors $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E) \neq \{0\}$.

II – Application à la décomposition des endomorphismes

A – Décomposition de Jordan des endomorphismes nilpotents

Def 25 : • On appelle bloc de Jordan de taille d la matrice : [M²] 143

$$J_d := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

• Pour $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{N}^r$, on pose $J_\lambda = \mathrm{Diag}(J_{\lambda_1}, \dots, J_{\lambda_r})$.

Thm 26 (décomposition de Jordan des endomorphismes nilpotents) : [M²] 144
Supposons u nilpotent d'indice λ_1. Il existe $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r$ telle que $\lambda_1 + \dots + \lambda_r = n$, et $\mathcal{B}$ une base de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = J_{(\lambda_1, \dots, \lambda_r)}$.
Cette décomposition est unique.

B – Décomposition de Dunford

Thm 27 (décomposition de Dunford) : Si u est trigonalisable, alors il existe un unique couple $(d,n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $u = d + n$, $d \circ n = n \circ d$, d est diagonalisable et n est nilpotent. [M²] 141 [Rb] 613

Cor 28 : Sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, e^u est diagonalisable si, et seulement si u l'est. [Rb] 634

C- Une application : le critère de diagonalisabilité de Klarès

[M²] 154

Thm 29 (critère de Klarès) : Posons $ad_u : v \in \mathcal{L}(E) \longmapsto u \circ v - v \circ u$.
Si u est trigonalisable, alors :

$$u \text{ diagonalisable} \iff \operatorname{Ker}(ad_u) = \operatorname{Ker}(ad_u^2)$$

DEV 2

RÉFÉRENCES

[M²] Mansuy - Mneimné
[Rb] Rombaldi