153

Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction des endomorphismes en dimension finie. Applications.

Dans cette leçon, K désigne un corps, E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, et $u \in \mathcal{L}(E)$.

I - Algèbre des polynômes d'un endomorphisme

[M²] 1 Def 1 : Pour $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in K[X]$, on définit $P(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k u^k$ où $u^0 = id_E$ et $\forall k \geq 1$, $u^k = u \circ u^{k-1}$

[M²] 2 Thm 2 (de structure) : L'application $\varphi_u : K[X] \longrightarrow \mathcal{L}(E)$, $P \longmapsto P(u)$ est un morphisme de K-algèbres. Son image, notée $K[u]$, est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$, appelée *algèbre des polynômes en u*.

[M²] 2 Rq 3 : Par analogie, si $A \in \mathcal{M}_n(K)$, alors on définit $P(A) = \sum a_k A^k$ et $K[A] = \{P(A) : P \in K[X]\}$. Si $\mathcal{B}$ est une base de E et si $A = Mat_{\mathcal{B}}(u)$, alors $P(A) = Mat_{\mathcal{B}}(P(u))$.

[M²] 3 4 Prop/Def 4 : L'ensemble $I_u = Ker(\varphi_u)$ des polynômes dits *annulateurs de u*, est un idéal de $K[X]$, appelé *idéal annulateur de u*. Il n'est pas réduit à $\{0\}$, et donc admet un unique générateur unitaire, noté π_u, appelé *polynôme minimal de u*.

[M²] 4 Ex 5 :
- Soit p un projecteur de E. Le polynôme $X^2 - X$ annule p, et si $p \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $p \neq id_E$, alors $\pi_p = X^2 - X$. On a $\pi_{0_{\mathcal{L}(E)}} = X$ et $\pi_{id_E} = X - 1$.
- Soit s une symétrie de E. Le polynôme $X^2 - 1$ annule s, et si $s \neq id_E$, alors $\pi_s = X^2 - 1$.

[M²] 3 Rq 6 : Tout ceci n'est pas vrai en dimension infinie : considérer $K[X] \longrightarrow K[X]$, $P \longmapsto P'$.

Thm 7 : Notons $d = \deg(\pi_u)$. La famille $(id_E, u, \dots, u^{d-1})$ est une base de $K[u]$, et donc $\dim_K(K[u]) = d$. [R] 605

Prop 8 : Soit $P \in K[X]$. L'endomorphisme $P(u)$ est inversible si, et seulement si $P \wedge \pi_u = 1$. Le cas échéant, $P(u)^{-1} \in K[u]$. [R] 636

Cor 9 : Si $a_k u^k + \dots + a_1 u + a_0 id_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$ avec $a_0 \neq 0$, alors u est inversible, et : [M²] 5
$$u^{-1} = \frac{-1}{a_0}(a_k u^{k-1} + \dots + a_1 id_E)$$

Thm 10 : $K[u]$ est un corps $\Leftrightarrow$ $K[u]$ est intègre $\Leftrightarrow$ π_u est irréductible. [R] 606

II - Réduction des endomorphismes

A - Polynôme caractéristique

Def 11 : Le polynôme χ_u défini par $\chi_u = \det(X id_E - u)$ est appelé *polynôme caractéristique de u*. [M²] 54

Thm 12 (de CAYLEY - HAMILTON) : $\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. [M²] 81

Prop 13 : $Sp(u) = \chi_u^{-1}(\{0\}) = \pi_u^{-1}(\{0\})$ [R] 605 644

B - Diagonalisation, trigonalisation, décomposition

On suppose connue la leçon 149 autour des valeurs propres et vecteurs propres.

Def 14 : On dit que u est *diagonalisable* (resp. *trigonalisable*) s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale (resp. triangulaire). [M²] 89 105

Ex 15 : Les symétries et les projecteurs sont diagonalisables

Cor 16 : Si u est trigonalisable, alors $\begin{cases} tr(u) = \sum_{\lambda \in Sp(u)} m(\chi_u, \lambda)\lambda \\ \det(u) = \prod_{\lambda \in Sp(u)} \lambda^{m(\chi_u,\lambda)} \end{cases}$ [M²] 106

[M²] 43 <u>Lemme 17</u> (des noyaux) : Soit $(P,Q)\in K[X]^2$. Si $P\wedge Q = 1$, alors :

$$\mathrm{Ker}(PQ(u)) = \mathrm{Ker}(P(u)) \oplus \mathrm{Ker}(Q(u))$$

[M²] 84 <u>Prop 18</u> : Écrivons $\chi_u = \prod_{\lambda\in Sp(u)} (X-\lambda)^{m(\lambda)}$ et posons $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(\lambda id_E - u)$.

Pour tout $\lambda\in Sp(u)$, $1 \leqslant \dim(E_\lambda(u)) \leqslant m(\lambda)$.

[R] 683 <u>Thm 19</u> : • u est diagonalisable <=> π_u est scindé à racines simples
<=> il existe $P\in I_u$ scindé à racines simples
<=> χ_u est scindé et $\forall \lambda\in Sp(u)$, $\dim(E_\lambda(u)) = m(\lambda)$

[R] 676 • u est trigonalisable <=> χ_u est scindé <=> il existe $P\in I_u$ scindé.

[R] 764 <u>Ex 20</u> : Si $rg(u)=1$, alors u est diagonalisable <=> $tr(u)=0$

[R] 676 <u>Cor 21</u> : Sur un corps algébriquement clos, tout endomorphisme est trigonalisable.

<u>Rq 22</u> : Ça n'indique rien sur la diagonalisabilité : cex : $\begin{pmatrix}1 & i\\ i & 1\end{pmatrix}$.

[R] 676 <u>Prop 23</u> : Si F est un sous-espace vectoriel stable par u et si u est diagonalisable, alors $u : F \to F$ est diagonalisable.

[M²] 18 55 <u>Prop 24</u> : Si $A\in M_n(K)$ s'écrit par blocs $Diag(A_1,\dots,A_r)$, alors $\chi_A = \chi_{A_1}\cdots\chi_{A_r}$ et $\pi_A = \pi_{A_1}\vee\cdots\vee\pi_{A_r}$.

[Go] 175 <u>Prop 25</u> : Soit $v\in\mathcal{L}(E)$. Si u et v commutent, alors pour tout $\lambda\in Sp(u)$, $E_\lambda(u)$ est stable par v.

<u>Thm 26</u> : Soit $(u_i)_{i\in I}\in\mathcal{L}(E)^I$ une famille d'endomorphismes qui commutent deux à deux. Si les u_i, $i\in I$ sont diagonalisables (resp. trigonalisables), alors il existe une base de E dans laquelle les matrices de tous les u_i, $i\in I$, sont diagonales (resp. triangulaires). [R] 678 684

<u>Thm 27</u> (décomposition de Dunford) : Si χ_u est scindé (sur K), alors il existe un unique $(d,n)\in\mathcal{L}(E)^2$ tel que $u = d+n$ et d et n commutent. De plus, $(d,n)\in K[u]^2$. **DEV 1.a** [R] 613

Dans le groupe suivant, E est un espace euclidien et $u\in\mathcal{L}(E)$.

<u>Def 28</u> : On dit que u est *normal* si $uu^* = u^*u$ où u^* est l'adjoint de u. [R] 743

<u>Lemme 29</u> : Si u est normal, si $P_1,\dots,P_r$ sont de dimension 1 ou 2, sont deux à deux orthogonaux et stables par u, alors $E = P_1\oplus\cdots\oplus P_r$. [R] 745

<u>Thm 30</u> : Si u est normal, alors il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} D & & \\ & R_1 & \\ & & \ddots & \\ & & & R_p\end{pmatrix}$ par blocs, avec D diagonale et les R_k de la forme $\begin{pmatrix} a_k & -b_k\\ b_k & a_k\end{pmatrix}$, $b_k\neq 0$. **DEV 2**

<u>Thm 31</u> (spectral) : Tout endomorphisme symétrique réel est diagonalisable dans une base orthonormée. [R] 734

<u>Thm 32</u> : Si u est orthogonal, alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E orthonormale telle que : [R] 747

$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} I_p & & & & \\ & -I_q & & & \\ & & R_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & R_t\end{pmatrix}$$

où R_k est de la forme $R_k = \begin{pmatrix}\cos(\theta_k) & -\sin(\theta_k)\\ \sin(\theta_k) & \cos(\theta_k)\end{pmatrix}$.

III – Exemples et applications

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

A – Puissance et inverse d'une matrice

Soit $p \in \mathbb{N}$. On note $d = \deg(\mu_A)$.

[M²] 6 <u>Prop 33</u> : La connaissance de $A, A^2, \dots, A^{d-1}$ suffit à connaître toutes les puissances de A : en effet, si $X^p = Q\mu_A + R$ est la division euclidienne de X^p par μ_A, alors $A^p = R(A) \in \mathrm{Vect}(A, A^2, \dots, A^{d-1})$.

<u>Rq 34</u> : On peut remplacer μ_A par n'importe quel polynôme annulateur, mais μ_A est de degré minimal.

<u>Ex 35</u> : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. On a $\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & -1 \\ 0 & X-2 \end{vmatrix} = (X-1)(X-2)$, et

$X^p = (X-1)(X-2)Q(X) + R(X)$, avec $R(X) = aX + b$. Comme $R(1) = 1^p = a+b$ et $R(2) = 2^p = 2^p a + b$, on en déduit que $R(X) = (2^p - 1)X + 2 - 2^p$, et donc

$$A^p = (2^p - 1)A + (2 - 2^p)I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2^p - 1 \\ 0 & 2^p \end{pmatrix}.$$

[M²] 5 <u>Prop 36</u> : Soit $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ annulateur de A. Si $a_0 \neq 0$, alors A est inversible, et :

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^{p} a_k A^{k-1}$$

B – Exponentielle de matrice

Dans paragraphe $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

[M²] 221 <u>Def 37</u> : L'exponentielle de A, notée e^A ou $\exp(A)$, est $e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$.

[M²] 223 225 <u>Prop 38</u> :
- $e^A \in \mathbb{K}[A]$
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et si A est diagonalisable, alors $A \in \mathbb{K}[e^A]$.

<u>Rq 38</u> : S'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tels que $PAP^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, alors $e^A = P^{-1} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P$. En pratique, il est plus facile d'utiliser la méthode du paragraphe précédent pour calculer les puissances de A, que de diagonaliser A.

<u>Ex 39</u> : D'après Ex 33, $e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = \begin{pmatrix} e^1 & e^{2^p - 1} \\ 1 & e^{2^p} \end{pmatrix}$.

[R] 634 <u>Thm 40</u> : A est diagonalisable $\Leftrightarrow$ e^A est diagonalisable **DEV 1.b**

RÉFÉRENCES

[Gr] : Algèbre linéaire (Joseph Grifone) [6e édition, 2e version]

[M²] : Algèbre linéaire. Réduction des endomorphismes (Roger Mansuy, Rached Mneimné) [3e édition]

[R] : Mathématiques pour l'agrégation – Algèbre et géométrie (Jean-Étienne Rombaldi) [2e édition]

[Go] : Les maths en tête – Algèbre et Probabilités (Xavier Gourdon) [3e édition]