Déterminant. Exemples et applications.

152

Dans cette leçon, $\mathbb{K}$ désigne un corps, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

On fixe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E.

I- Les notions de déterminants

A- Des formes multilinéaires au déterminant d'une famille de vecteurs

[Go] 140 **Def 1** : Une forme k-linéaire sur E est une application $\varphi : E^k \longrightarrow K$ telle que pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, pour tout $(x_1, \dots, x_k) \in E^k$, $\varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, \dots, x_n)$ est linéaire. On note $\bigotimes^k E^*$ l'ensemble des formes k-linéaires sur E.

Prop 2 : $(e_{i_1}^* \otimes \dots \otimes e_{i_k}^*)_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n}$ est une base de $\bigotimes^k E^*$, où pour $(x_1, \dots, x_k) \in E^k$, $e_{i_1}^* \otimes \dots \otimes e_{i_k}^* (x_1, \dots, x_k) = e_{i_1}^*(x_1) \cdots e_{i_k}^*(x_k)$.

[Go] 140-141 **Def 3** : Une forme k-linéaire alternée est une forme k-linéaire $\varphi \in \bigotimes^k E^*$ telle que $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_k$, $\forall (x_1, \dots, x_k) \in E^k$, $\varphi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}) = \varepsilon(\sigma)\, \varphi(x_1, \dots, x_k)$.
On note $\Lambda^k E^*$ l'espaces des formes k-linéaires alternées sur E.

Prop 4 : $(e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*)_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n}$ est une base de $\Lambda^k E^*$, où pour $(x_1, \dots, x_k) \in E^k$, $e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^* (x_1, \dots, x_k) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma)\, e_{i_1}^*(x_{\sigma(1)}) \cdots e_{i_k}^*(x_{\sigma(k)})$.

Cor 5 : $\dim(\Lambda^k E^*) = \binom{n}{k}$.

[Go] 141 **Def 6** : On appelle déterminant dans la base $\mathcal{B}$ l'unique forme n-linéaire alternée $\det_{\mathcal{B}}$ sur E vérifiant $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$. (La famille $(\det_{\mathcal{B}})$ est une base de $\Lambda^n E^*$.)

[Go] 141 **Prop 7** : $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n$, $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, e_1^*(x_{\sigma(1)}) \cdots e_n^*(x_{\sigma(n)})$.

[Go] 141 **Cor 8** : Soient $\varphi \in \Lambda_n E^*$ et $\mathcal{B}'$ une autre base de E. On a $\varphi = \varphi(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}$, en particulier on a donc $\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}$.

Prop 9 : Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. Sont équivalentes : [Go] 141-142

1. $(x_1, \dots, x_n)$ est liée
2. Pour toute base $\mathcal{B}$ de E, $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = 0$
3. Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = 0$.

B- Déterminant d'une matrice carrée, d'un endomorphisme

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Def 10 : Si $C_1, \dots, C_n$ sont les colonnes de A, alors : [Go] 142

$$\det(A) := \det_{\mathcal{E}}(C_1, \dots, C_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

où $\mathcal{E}$ désigne la base canonique de K^n.

Prop 11 : Soient $\lambda \in K$ et $B \in \mathcal{M}_n(K)$. [Go] 142

1. $\det(A)$ ne change pas si ajoute à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes.
2. $\det({}^tA) = \det(A)$ | 3. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ | 4. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
5. $A \in GL_n(K) \iff \det(A) \neq 0$ (auquel cas $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$).

Def 12 : Le déterminant de u, défini par : [Go] 142

$$\det(u) = \det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n)) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u))$$

ne dépend pas du choix de $\mathcal{B}$.

C- Propriétés analytiques

Prop 13 : $A \longmapsto \det(A)$ est polynomiale en les coefficients de A (relativement à la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$), donc lisse. [Rv] 83

Cor 14 : $GL_n(\mathbb{K})$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et $SL_n(\mathbb{R})$ est fermé.

Prop 15 : $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $d(\det)(X)(H) = \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{Com}(X) H)$, où $\mathrm{Com}(X)$ est rappelée dans le paragraphe II.B. [Rv] 83

II - Calcul pratique d'un déterminant

A - Cas simples, pivot de Gauss

[Go] 142 **Notation 16** : Si $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$, alors on note $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$.

[Gr] 106 **Prop 17** :
- $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

FIGURE 1

- $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ i & j & k \end{vmatrix} = aek + bfi + djc - cei - fja - bdk$ (règle de Sarrus)

[Go] 142 **Lemme 18** : Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est triangulaire, alors $\det(A) = a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdots a_{n,n}$.

Appli 19 (pivot de Gauss) : Pour calculer le déterminant d'une matrice, on peut la transformer en une matrice triangulaire par des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes :
- la transvection $(C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j)$ ne change pas le déterminant,
- la permutation $(C_i \leftrightarrow C_j)$ change le signe du déterminant,
- la dilatation $(C_i \leftarrow \alpha C_i)$ change le déterminant d'un facteur α.

Ex 20 : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

[Go] 142 **Thm 21** : Le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est égal au produit des déterminants des blocs diagonaux.

B - Mineurs, cofacteurs et développements

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(K)$

[Go] 142 **Def 22** : Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.
- On appelle mineur d'indice (i,j) de A le déterminant de la matrice extraite de A en supprimant sa i^e ligne et sa j^e colonne. On note $\Delta_{i,j}$ ce mineur.
- On appelle cofacteur d'indice (i,j) de A la quantité $A_{i,j} = (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$
- On appelle comatrice de A la matrice $\mathrm{Com}(A) = (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

[Go] 143 **Thm 23** (Formules de développement d'un déterminant) :
- par rapport à la i^e ligne : $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} A_{i,j}$
- par rapport à la j^e colonne : $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} A_{i,j}$.

Ex 24 : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 + 0 = 1$

[Go] 143 **Thm 25** (formule de la comatrice) : $A \cdot {}^t\mathrm{Com}(A) = {}^t\mathrm{Com}(A) \cdot A = \det(A) I_n$.

C - Déterminants remarquables

[G] 153 **Ex 26** (déterminant circulant) : Pour tout $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{n} P(\omega^k) \quad \text{où } \omega = e^{\frac{2i\pi}{n}} \text{ et } P = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} X^i.$$

[IP] 388 **Appli 27** : Soient $z_1, \ldots, z_n$ des complexes qui sont les affixes des points $M_1, \ldots, M_n$. On définit une suite de polygônes du plan comme suit :
- $P_0 = M_1 \cdots M_n$
- Pour $n \geq 1$, P_n est le polygône dont les sommets sont les milieux des arêtes de P_{n-1}.

Alors $(P_n)_n$ converge vers l'isobarycentre de P_0

FIGURE2

DEV 1

[G] 143 **Ex 28** (déterminant de VANDERMONDE) : Pour tout $(a_1, \ldots, a_n) \in K^n$,

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} a_i - a_j$$

III- Applications des déterminants...

A- ... en algèbre linéaire

[BMP] 181 **Rq 29** : On étend la formule explicite du déterminant au cas des matrices à coefficients dans un anneau intègre A. Si $M \in \mathcal{M}_n(A)$, alors $\det(M) \in A$, et par plongement de A dans $\mathrm{Frac}(A)$, les propriétés déjà vues restent vraies.

[Go] 172 **Def 30** : ▸ Le *polynôme caractéristique* de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est $\chi_A = \det(XI_n - A)$.
▸ Le *polynôme caractéristique* d'un endomorphisme est celui de sa matrice dans n'importe quelle base.

[Gr] 159 [C] 97 **Prop 31** : ▸ $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $Sp(A) = \chi_A^{-1}(\{0\})$.
▸ $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

[M²] 81 **Thm 32** (de Cayley - Hamilton) : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_A(A) = 0$.

[Gr] 145 **Thm 33** (systèmes de Cramer) : Soient $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathbb{K}^n$. On note $A_1, \dots, A_n$ les colonnes de A. La solution de $AX = B$ est donnée par $X = (x_1, \dots, x_n)$ où :
$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad x_i = \frac{\det(A_1, \dots, A_{i-1}, B, A_{i+1}, \dots, A_n)}{\det(A)}$$

B- ... en calcul intégral

[BP] 255-256 **Thm 34** (de changement de variable) [admis] : Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, et $\varphi : U \longrightarrow V$ un C^1-difféomorphisme. Pour toute fonction $f : V \longrightarrow \mathbb{R}^+$ borélienne,
$$\int_U f \circ \varphi(u) \cdot |\det(d\varphi(u))| \, du = \int_V f(v) \, dv$$

Appli 35 : $\forall \alpha > 0$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$.

[BMP] 184 **Thm 36** : Notons λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. Pour tous $X \subseteq \mathbb{R}^n$ mesurable et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $\lambda(u(X)) = |\det(u)| \cdot \lambda(X)$.

Cor 37 : Soit $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, notons $P(v_1, \dots, v_n) = \{\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i : 0 \leq \lambda_i \leq 1\}$ le parallélotope engendré par $v_1, \dots, v_n$. On a $\lambda(P(v_1, \dots, v_n)) = |\det(v_1, \dots, v_n)|$. FIGURE 3 [BMP] 184

C- ... en géométrie

Dans ce paragraphe, $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est un $\mathbb{K}$-espace préhilbertien.

Def 38 : Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. On appelle *matrice de Gram* de $x_1, \dots, x_n$ la matrice [Go] 274
$M_G(x_1, \dots, x_n) = (\langle x_i | x_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq n}$, et *déterminant de Gram* de $x_1, \dots, x_n$ son déterminant $G(x_1, \dots, x_n)$.

Thm 39 : Soient F un sous-espace vectoriel de E, et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de F. [Go] 275
$$\forall x \in E, \quad d(x,F)^2 = \frac{G(e_1, \dots, e_n, x)}{G(e_1, \dots, e_n)}$$

DEV 2

Thm 40 (inégalités de Hadamard) : [Go] ~273
1. $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n$, $G(x_1, \dots, x_n) \leq \|x_1\|^2 \cdots \|x_n\|^2$
2. $\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{C}^n)^n$, $|\det(x_1, \dots, x_n)| \leq \|x_1\|_2 \cdots \|x_n\|_2$

De plus, dans les deux points, il y a égalité si et seulement $(x_1, \dots, x_n)$ est orthogonale.

FIGURE 1 : Règle de SARRUS

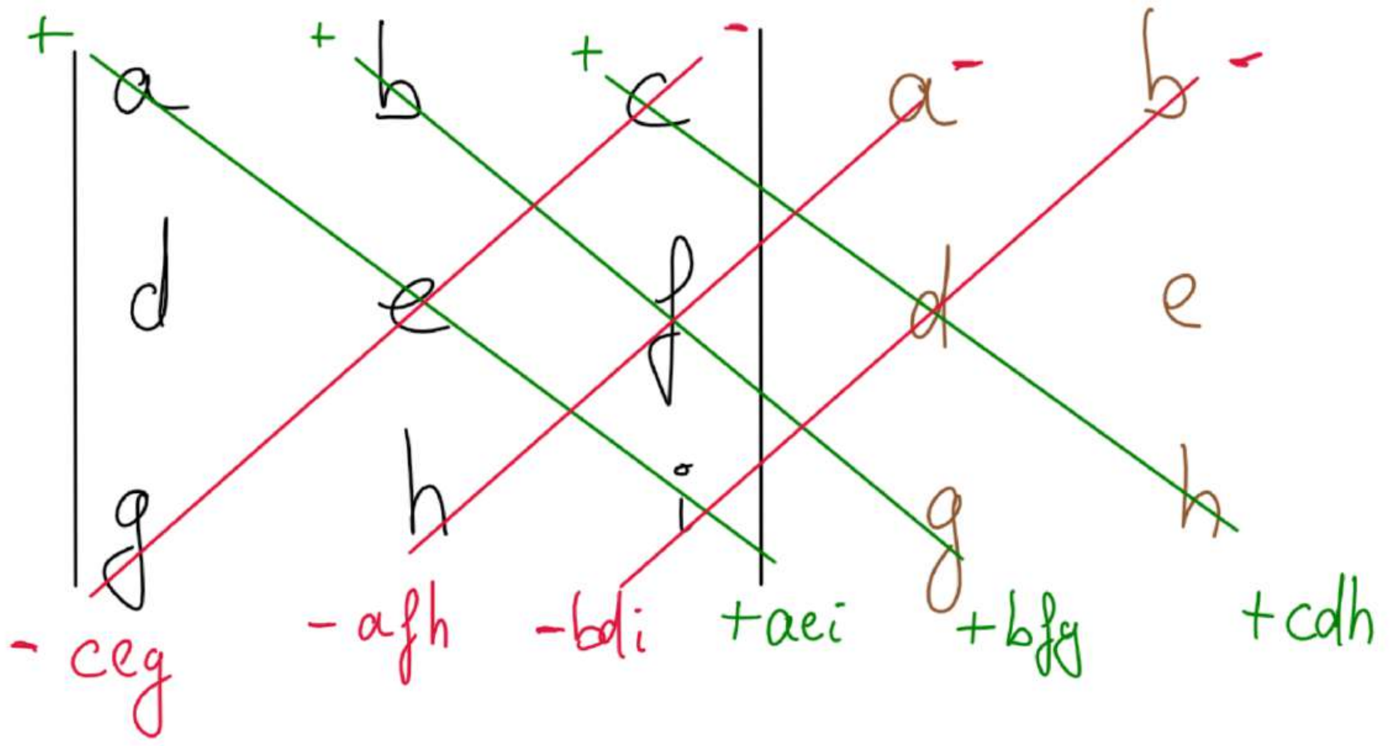


FIGURE 2 : Suite de polygones

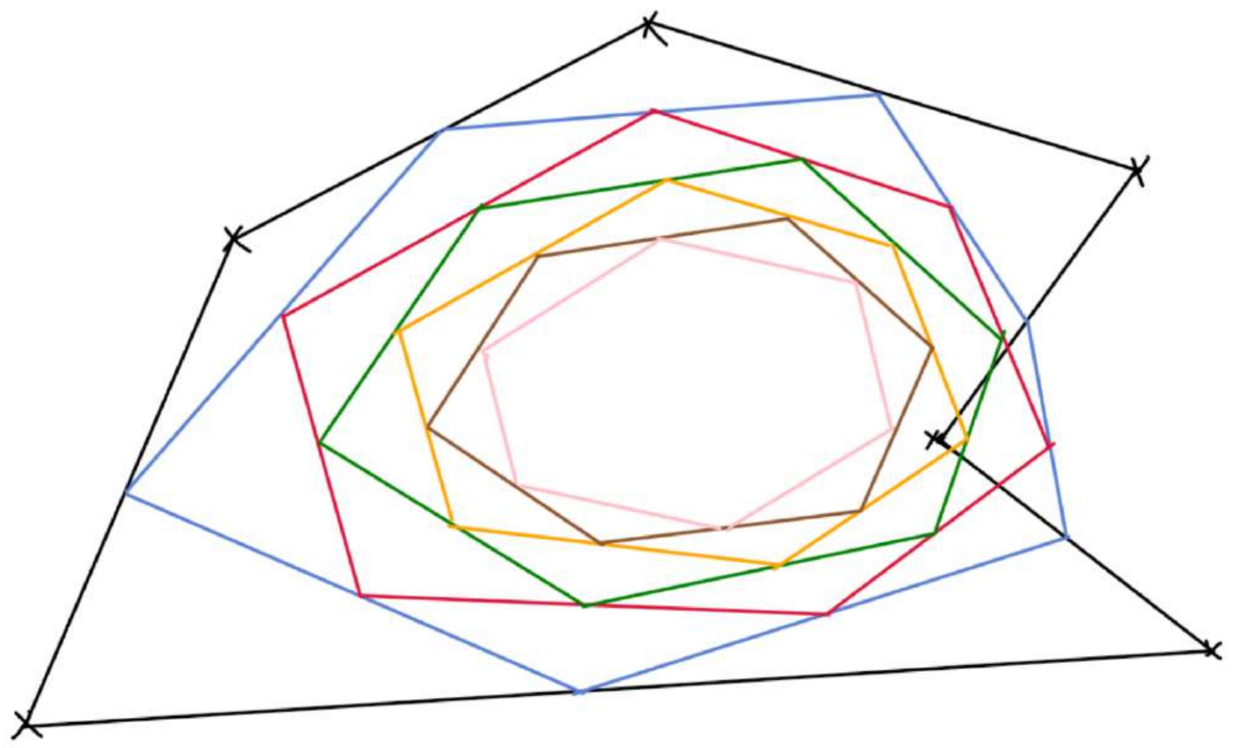
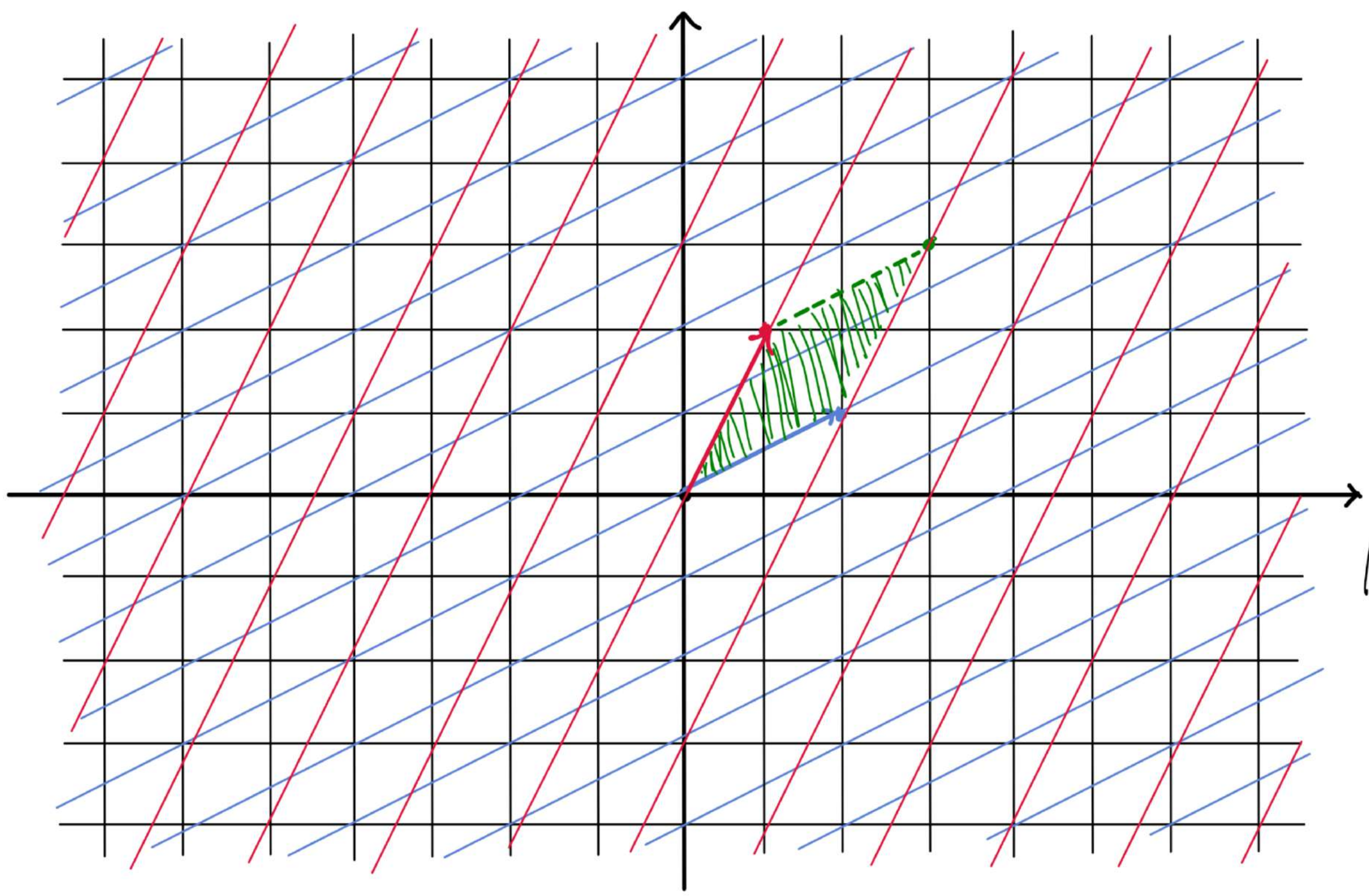
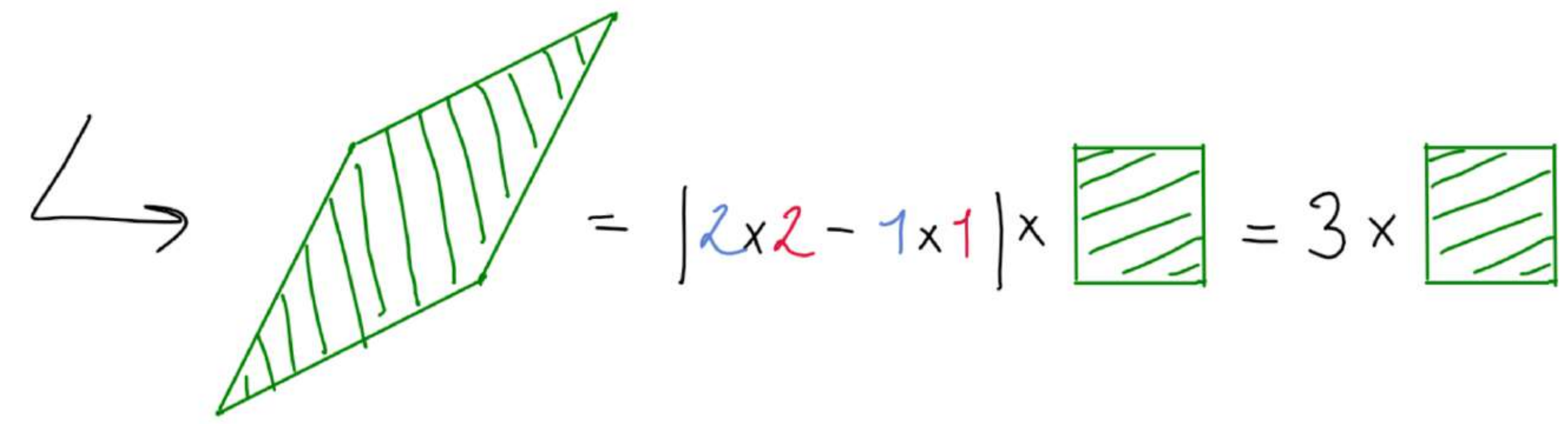


FIGURE 3 : Lien entre volume et déterminant



$\mathbb{R}^2 \longmapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbb{R}^2$



RÉFÉRENCES

[Go] : Les maths en tête – Algèbre et Probabilités (Xavier Gourdon) [3e édition]

[Gr] : Algèbre linéaire (Joseph Grifone) [6e édition, 2e version]

[R] : Petit guide du calcul différentiel (François Rouvière) [4e édition]

[IP] : L'oral à l'agrégation de mathématiques (Lucas Issenmann, Timothée Pecatte)

[M²] : Algèbre linéaire. Réduction des endomorphismes. (Roger Mansuy, Rached Mneimné) [3e édition]

[C] : Carnet de voyage en Algèbre (Philippe Caldero, Marie Peronnier)

[BMP] : Objectif Agrégation [2e édition] (Vincent Beck, Jérôme Malick, Gabriel Peyré)

[BP] : Théorie de l'intégration (Marc Briane, Gilles Pagès) [7e édition]