Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

151

Dans toute cette leçon, E désigne espace vectoriel sur un corps K.
On ne rappellera pas les éléments de la théorie des espaces vectoriels.

I – Théorie de la dimension finie

A – Familles libres, familles génératrices, bases

Soit $\mathcal{F} \subseteq E$.

[Gr] 11 **Def 1** : ▸ On dit que $\mathcal{F}$ est libre si :

$$\forall (\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n}) \in \mathcal{F}^n, \ \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n, \ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{v_k} = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

▸ On dit que $\mathcal{F}$ est liée si $\mathcal{F}$ n'est pas libre.

[Gr] 10 ▸ On dit que $\mathcal{F}$ est génératrice (de E) si tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire finie de vecteurs de $\mathcal{F}$.

[Gr] 13 ▸ On dit que $\mathcal{F}$ est une *base* de E si $\mathcal{F}$ est à la fois libre et génératrice.

Ex 2 : ▸ Dans $\mathbb{R}^2$:

	Libre	Liée
Génératrice	$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$	$\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}\right\}$
Non génératrice	$\left\{\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}\right\}$	$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right\}$

[Gr] 13 ▸ La famille $\{(0, \dots, \underset{i}{1}, \dots, 0)\}_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une base de K^n, appelée *base canonique*.

[Gr] 13 **Prop 3** : $\mathcal{F} = \{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n}\} \subseteq E$ est une base de E *si, et seulement si* :

$$\forall x \in E, \ \exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n : x = \lambda_1 \vec{v_1} + \dots + \lambda_n \vec{v_n}$$

[Gr] 14 **Prop 4** : ▸ $\{x\}$ est libre $\iff x \neq 0$

▸ Toute sur-famille d'une famille génératrice (resp. liée) est génératrice (resp. liée).

▸ Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

▸ Une famille contenant le vecteur nul est liée.

B – Dimension d'un espace vectoriel

Def 5 : On dit que E est de dimension finie si E admet une famille génératrice finie. [Gr] 11

Ex 6 : ▸ K^n est un K-espace vectoriel de dimension finie, contrairement à $K[X]$.

▸ $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension infinie.

Lemme 7 (de Steinitz) : Si $\mathcal{G} \subseteq E$ est finie et génératrice, alors toute famille de E contenant plus de $\# \mathcal{G}$ éléments est liée. [Gr] 17

Thm/Def 8 : Si E est de dimension finie, alors toutes les bases de E ont le même cardinal (fini), que l'on appelle *dimension de E*, et que l'on note $\dim_K(E)$ ou $\dim(E)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur K. [Gr] 17

À partir de maintenant, on suppose E de dimension finie.

Thm 9 : $\mathcal{B} \subseteq E$ est une base de $E \iff \mathcal{B}$ est libre et $\#\mathcal{B} = \dim(E)$ [Gr] ~18
$\iff \mathcal{B}$ est génératrice et $\#\mathcal{B} = \dim(E)$.

Thm 10 : Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors F est de dimension finie, et $\dim(F) \leq \dim(E)$ avec égalité si, et seulement si $E = F$. [Gr] 19

Thm 11 (des bases extraites et incomplètes) : Soient $\mathcal{L} \subseteq E$ libre et $\mathcal{G} \subseteq E$ génératrice telles que $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{G}$. Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{G}$. [Gr] 15

Cor 12 : Tout espace vectoriel de dimension finie admet une base.

Prop 13 : Soit F un espace vectoriel de dimension finie. Les espaces vectoriels E et F sont isomorphes si, et seulement si $\dim(E) = \dim(F)$. [Gr] 63

Ex 14 : Soit $(a_0, \dots, a_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$. L'application $y \longmapsto (y(0), y'(0), \dots, y^{(p-1)}(0))$ est un isomorphisme entre $S_{\mathbb{R}}(E) = \{y \in C^p(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \mid y^{(p)} = a_{p-1} y^{(p-1)} + \dots + a_0 y\}$ et $\mathbb{C}^p$. Par conséquent, $\dim(S_{\mathbb{R}}(E)) = p$.

[Gr] 22 Prop 15 : Soient $E_1, \dots, E_p$ supplémentaires dans E. Si $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$ sont des bases de $E_1, \dots, E_p$, alors $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{B}_p$ est une base de E, dite adaptée à la décomposition $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_p$.

[Gr] 22 Cor 16 : $\dim(E \oplus F) = \dim(E) + \dim(F)$.

[Gr] 23 Prop 17 : $E = E_1 \oplus E_2 \iff \begin{cases} E = E_1 + E_2 \\ \dim(E) = \dim(E_1) + \dim(E_2) \end{cases} \iff \begin{cases} E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\} \\ \dim(E) = \dim(E_1) + \dim(E_2) \end{cases}$

C - Calculs de dimensions

Dans ce paragraphe, F est un espace vectoriel de dimension finie.

[Gr] 24 Thm 18 (formule de GRASSMANN) : $\dim(E+F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F) < +\infty$

[Gr] 18 Prop 19 : $\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F) < +\infty$

Prop 20 : $\dim(\mathcal{L}(E,F)) = \dim(E) \times \dim(F) < +\infty$.

D - Extensions de corps

Dans ce paragraphe, $F/L/K$ est une tour d'extensions de corps.

[P] 65 Def 21 : On appelle degré de L/K l'entier $[L:K] = \dim_K(L)$.

[P] 65 Thm 22 (de la base télescopique) : Supposons F/L et L/K de degrés finis : elles admettent alors des bases $\{f_1, \dots, f_n\}$ et $\{e_1, \dots, e_p\}$ respectivement. La famille $\{e_i f_j\}_{\substack{1 \le i \le p \\ 1 \le j \le n}}$ est une base de F/K, et donc $[F:K] = [F:L] \cdot [L:K]$.

Def 23 : On dit que $\alpha \in L$ est algébrique sur K s'il existe $P \in K[X] \setminus \{0\}$ tel que $P(\alpha) = 0$. [P] 66
Le cas échéant, on définit le polynôme minimal de α sur K comme étant l'unique générateur unitaire de l'idéal $\{P \in K[X] \mid P(\alpha) = 0\}$, appelé idéal annulateur de α.

Notations 24 : Soit $\alpha \in L$. On pose $\begin{cases} K[\alpha] = \{P(\alpha) : P \in K[X]\} \\ K(\alpha) = \mathrm{Frac}(K[\alpha]) \end{cases}$ [P] 66

Thm 25 : Soit $\alpha \in L$. Sont équivalentes : [P] 66

1. α est algébrique sur K
2. $K[\alpha] = K(\alpha)$
3. $[K[\alpha] : K] < +\infty$.

Le cas échéant, $[K[\alpha] : K]$ est le degré du polynôme minimal de α sur K.

II - Rang d'une application linéaire, d'une matrice, d'une famille

A - Définition(s) - formule du rang & conséquences

Dans ce paragraphe, on se donne F de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E,F)$, une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E, et $(x_1, \dots, x_r) \in E^r$.

Def 26 : ▸ Le rang de u est l'entier $\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{Im}(u))$ [Gr] 61 82
▸ Le rang de $\{x_1, \dots, x_r\}$ est l'entier $\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_r) = \dim(\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_r))$.

Prop 27 : $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u(e_1), \dots, u(e_n))$. [Gr] 82

Thm 28 (du rang) : $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(u)) + \mathrm{rg}(u)$. [Gr] 64

Thm 29 : Si $\dim(F) = \dim(E)$, alors : u bijective $\iff$ u injective $\iff$ u surjective $\iff \exists v \in \mathcal{L}(F,E) : u \circ v = \mathrm{id}_E \iff \exists v \in \mathcal{L}(F,E) : v \circ u = \mathrm{id}_F$. [Gr] 65

Ex 30 : Ce n'est pas vrai en dimension infinie : dans $K[X]$, $P \mapsto P'$ est surjective mais pas injective. [Gr] 65

Prop 31 : ▸ $\forall v \in GL(E)$, $\mathrm{rg}(u \circ v) = \mathrm{rg}(u)$. ▸ $\forall w \in GL(F)$, $\mathrm{rg}(w \circ u) = \mathrm{rg}(u)$

Cor 32 : Le rang est invariant par équivalence.

B- Le cas particulier des matrices

Soit $A\in\mathcal{M}_{n,p}(K)$. Notons $C_1,\dots,C_p$ ses colonnes et $L_1,\dots,L_n$ ses lignes.

[Gr] 82 **Def 33** : Le rang de A est $\mathrm{rg}(A)=\dim(\{AX : X\in\mathcal{M}_{n,1}(K)\})=\mathrm{rg}(C_1,\dots,C_p)$.

[Gr] 82 **Prop 34** : Le rang d'une application linéaire est le rang de sa matrice dans n'importe quel couple de bases.

[Go] 129 **Thm 35** : $\mathrm{rg}(A)=r \Rightarrow A$ est équivalente à $J_{n,p,r}:=\left(\begin{array}{c|c} I_r & O_{p-r} \\ \hline O_{n-r} & O_* \end{array}\right)$

[Go] 128 **Cor 36** : Deux matrices sont équivalentes si, et seulement si elles ont même rang.

[Go] 128 **Rq 37** : Pour déterminer le rang de A en pratique, on utilise l'algorithme du pivot de Gauss pour transformer A en $J_{n,p,r}$.

[Gr] 83 **Thm 38** : $\mathrm{rg}(A)=\mathrm{rg}({}^tA)$.

[Go] 128 **Thm 39** : Le rang de A est la taille de sa plus grande sous-matrice inversible, donc l'ordre de son plus grand mineur non nul.

Cor 41 : Si L/K est une extension de K, alors $\mathrm{rg}_K(A)=\mathrm{rg}_L(A)$

III - Applications

A- Formes quadratiques réelles

[R] 476 **Thm 42** (loi d'inertie de Sylvester) : Soient E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n>0$, et q est une forme quadratique sur E. Soit $\mathcal{B}=\{e_1,\dots,e_n\}$ une base de E orthogonale pour q. Quitte à renuméroter $\mathcal{B}$, supposons que $q(e_1)>0,\dots,q(e_s)>0$, $q(e_{s+1})<0,\dots,q(e_{s+t})<0$, $q(e_{s+t+1})=\dots=q(e_n)=0$.
Le couple (s,t) ne dépend alors pas du choix de la base orthogonale : on l'appelle signature de q. **DEV 1**

Thm 43 : La classe de congruence d'une forme quadratique réelle ne dépend que du rang et de la signature.

B- Réduction des endomorphismes

Dans ce paragraphe, on fixe $u\in\mathcal{L}(E)$.

Prop/Def 44 : $\{P\in K[X] \mid P(u)=0_{\mathcal{L}(E)}\}$ est un idéal non nul : son unique générateur unitaire est appelé polynôme minimal de u. On le note μ_u. [R] 604

Thm 45 : u est diagonalisable $\Leftrightarrow$ μ_u est scindé à racines simples. [R] 683

Dans le groupe suivant, E est un espace euclidien et $u\in\mathcal{L}(E)$.

Def 46 : On dit que u est normal si $uu^*=u^*u$ où u^* est l'adjoint de u. [R] 743

Lemme 47 : Si u est normal, $\exists\, P_1,\dots,P_r$ sont de dimension 1 ou 2, deux à deux orthogonaux et stables par u tq $E=P_1\oplus\dots\oplus P_r$. [R] 745

Thm 48 : Si u est normal, alors il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)=\begin{pmatrix} D & & & \\ & R_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & R_p\end{pmatrix}$ par blocs, avec D diagonale et les R_k de la forme $\begin{pmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k\end{pmatrix}$, $b_k\neq 0$. **DEV 2**

RÉFÉRENCES

[Gr] : Algèbre linéaire (Joseph Grifone) [6e édition, 2e version]

[Go] : Les maths en tête – Algèbre et Probabilités (Xavier Gourdon) [3e édition]

[P] : Cours d'algèbre (Daniel Perrin)

[R] : Mathématiques pour l'agrégation – Algèbre et géométrie (Jean-Étienne Rombaldi) [2e édition].