106

Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $GL(E)$. Applicat°.

Dans cette leçon, K est un corps commutatif, et E est un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

I - Endomorphismes inversibles d'un espace vectoriel

A - Introduction au groupe linéaire

[Rb] 139 <u>Thm / Def 1</u> : ▸ L'ensemble $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes de E est un anneau pour $+$ et $\circ$, dont le groupe des inversibles est noté $GL(E)$, et est appelé *groupe linéaire de E*.

▸ Similairement, l'ensemble $\mathcal{M}_n(K)$ des matrices carrées de taille $n \times n$ est un anneau pour $+$ et $\times$, dont le groupe des inversibles est noté $GL_n(K)$, appelé *groupe linéaire d'ordre n sur K*.

[Rb] 140 <u>Rq 2</u> : Étant donnée une base $\mathcal{B}$, l'application $u \longmapsto Mat_{\mathcal{B}}(u)$ induit un isomorphisme entre $GL(E)$ et $GL_n(K)$.

[Rb] 141 <u>Def 3</u> : On note $SL(E)$ (resp. $SL_n(K)$) le noyau du morphisme $\det$ de $GL(E)$ (resp. $GL_n(K)$) dans $K^\times$. On l'appelle *groupe spécial linéaire de E* (resp. *groupe spécial linéaire d'ordre n sur K*).

[Rb] 140 <u>Thm 4</u> : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Comme $\dim(E) < +\infty$, sont équivalentes :

1▸ $u \in GL(E)$

2a▸ u est injectif

2b▸ $\mathrm{Ker}(u) = \{0\}$

2c▸ $\exists v \in \mathcal{L}(E) : v \circ u = id_E$

3a▸ u est surjectif

3b▸ $\mathrm{Im}(u) = E$

3c▸ $\exists v \in \mathcal{L}(E) : u \circ v = id_E$

4▸ L'image par u d'une base de E est une base de E.

5▸ $\det(u) \neq 0$

<u>Rq 5</u> : Une matrice A est inversible si, et seulement si ses colonnes forment une base de K^n, si et seulement si ses lignes forment une base de K^n.

<u>Def 6</u> : On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est une *homothétie de rapport $\lambda \in K^\times$* si $\forall x \in E$, $u(x) = \lambda x$.

<u>Prop 7</u> : Une homothétie de rapport $\lambda \in K^\times$ est inversible, d'inverse l'homothétie de rapport $1/\lambda$.

<u>Prop 8</u> : Les homothéties sont les seuls endomorphismes à stabiliser toute droite. [Rb] ~168

B - Opérations élémentaires

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. On note $L_1, \dots, L_p$ les lignes de A, et $C_1, \dots, C_n$ ses colonnes.

<u>Def 9</u> : Soient $\alpha \in K^\times$, $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. [Bu] 315-317

▸ On définit une matrice de *dilatation* $D_i(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \in GL_n(K)$.

▸ On définit une matrice de *transvection* $T_{i,j}(\alpha) = I_n + \alpha E_{i,j} \in GL_n(K)$.

▸ On définit une matrice de *permutation* $P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{1 \leq i,j \leq n} \in GL_n(K)$.

<u>Def 10</u> : On définit les *opérations élémentaires* sur les colonnes :

▸ $C_i \longleftarrow \alpha C_i$: on remplace C_i par αC_i

▸ $C_i \longleftarrow C_i + \alpha C_j$: on remplace C_i par $C_i + \alpha C_j$

▸ $C_i \longleftrightarrow C_j$: on échange C_i et C_j

<u>Thm 11</u> : On a les correspondances suivantes entre opérations élémentaires et multiplication matricielle : [Bu] 315-318

▸ $D_i(\alpha) A \iff L_i \longleftarrow \alpha L_i$ ▸ $A D_i(\alpha) \iff C_i \longleftarrow \alpha C_i$

▸ $T_{i,j}(\alpha) A \iff L_i \longleftarrow L_i + \alpha L_j$ ▸ $A T_{i,j}(\alpha) \iff C_j \longleftarrow C_j + \alpha C_i$

▸ $P_{(i,j)} A \iff L_i \leftrightarrow L_j$ ▸ $A P_{(i,j)} \iff C_i \leftrightarrow C_j$

Prop 12 : $\sigma \longmapsto P_\sigma$ est un morphisme de groupes injectif de $\mathfrak{S}_n$ dans $GL_n(K)$.

II - Structure de GL(E), sous-groupe orthogonal

A - Structure de groupe

[Rb] ~131 Thm 13 (pivot de Gauss) : Pour toute matrice de rang r, il existe une suite d'opérations élémentaires qui transforme cette matrice en la matrice $J_{n,r} = \mathrm{Diag}(I_r, O_{n-r})$.
Plus précisément, si $\mathrm{rg}(A)=n$, alors il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et des matrices de transvection $T_1, \dots, T_p$ telles que $A = P_\sigma T_1 \cdots T_p D_\alpha$ où D_α est la matrice de dilatation D_α de rapport $\alpha = \det(A)$.

[Rb] 159-133 Cor 14 :
- Les matrices de transvection et de dilatation engendrent $GL_n(K)$.
- Les matrices de transvection engendrent $SL_n(K)$.

[Rb] 141 Cor 15 : $GL(E)/SL(E) \simeq K^\times$

[Rb] 141 Cor 16 :
- $Z(GL(E)) = K^\times id_E$ (c'est l'ensemble des homothéties)
- $Z(SL(E)) = U_n(K) id_E$ où $U_n(K) = \{\lambda \in K^\times \mid \lambda^n = 1\}$.

B - Le groupe spécial orthogonal

Soit q une forme quadratique sur E, de forme polaire φ. Supposons $\mathrm{car}(K) \neq 2$.

[P] 123-124 Def 17 :
- Le groupe orthogonal de (E,q) est $O(q) = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid q \circ u = q\}$
- Le groupe spécial orthogonal de (E,q) est $SO(q) = \{u \in O(q) \mid \det(u) = 1\}$
- Lorsque q est le produit scalaire canonique relativement à une base donnée, on note $O(E) = O(q) = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid {}^t u \circ u = id_E\}$ et $SO(E) = SO(q) = \{u \in O(E) \mid \det(u) = 1\}$
- On note également $O_n(K) = \{M \in M_n(K) \mid {}^t M M = I_n\}$ et $SO_n(K) = \{M \in O_n(K) \mid \det(M) = 1\}$.

Prop 18 : Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E, alors $u \in O(E) \Leftrightarrow \mathrm{Mat}_\mathcal{B}(u) \in O_n(K)$ [Rb] ~722

Thm 19 (de réduction des isométries) : Soit $u \in O(\mathbb{R}^n)$. Il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(u) = \mathrm{Diag}(R(\theta_1), \dots, R(\theta_r), \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ où $R(\theta_i) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{pmatrix}$ et $\varepsilon_i = \pm 1$. [Rb] 727

Rq 20 : $SO_2(\mathbb{R}) = \{R(\theta) : \theta \in \mathbb{R}\} \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. [P] ~146

Thm 21 : Soient p premier, $r \geq 1$ et $q = p^r$. [C] 50

$$SO_2(\mathbb{F}_q) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z} & \text{si } -1 \text{ est un carré mod } q \\ \mathbb{Z}/(q+1)\mathbb{Z} & \text{sinon} \end{cases}$$

DEV 1

Def 22 : Soit $u \in O(q)$ telle que $u^2 = id_E$. [P] 125
- On dit que u est une réflexion si $\dim(\mathrm{Ker}(u+id_E)) = 1$, autrement dit si u est une symétrie par rapport à un hyperplan.
- On dit que u est un renversement si $\dim(\mathrm{Ker}(u+id_E)) = 2$, autrement dit si u est une symétrie par rapport à un plan.

On suppose désormais que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, et que q est définie positive. [P] 143

DEV 2

Thm 21 : Tout élément de $O(q)$ est produit d'au plus n réflexions.

Lemme 22 : Si $n \geq 3$, alors pour toutes réflexions τ_1 et τ_2, il existe deux renversements σ_1 et σ_2 tels que $\tau_1 \tau_2 = \sigma_1 \sigma_2$.

Thm 23 : Pour $n \geq 3$, tout élément de $SO(q)$ est produit d'au plus n renversements.

Rq 24: Ces théorèmes restent vrais si E est un espace vectoriel de dimension finie sur un corps K de caractéristique $\neq 2$, et si q est non dégénérée (CARTAN, DIEUDONNÉ).

III - Topologie dans $GL(E)$

Dans ce paragraphe, K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

[Rb] 160-161 **Prop 25:** $GL(E)$ est ouvert dans $(\mathcal{L}(E), |||\cdot|||)$ et $u \mapsto u^{-1}$ est continue.

Prop 26:
- $GL_n(\mathbb{C})$ et $SL_n(\mathbb{K})$ sont connexes
- $GL_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes

Prop 27: $O_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$ sont compacts.

[Rb] 740 **Thm 28** (décomposition polaire): $\begin{array}{ccc} O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{R}) \\ (\Theta, S) & \longmapsto & \Theta S \end{array}$ est un homéomorphisme.

RÉFÉRENCES

[Rb] Rombaldi

[C] NH_2G_2 I

[P] Perrin

[Bu] Burg