103

Conjugaison dans un groupe. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

Dans cette leçon, $(G,\times)$ est un groupe, X un ensemble non vide, H un sous-groupe de G, et K est un corps commutatif.

I – Conjugaison d'un élément, d'un sous-groupe

[U] 34 37 Prop/Def 1 : ▸ G agit sur lui-même par conjugaison, par le morphisme :

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathfrak{S}(G) \\ g & \longmapsto & [\varphi_g : h \mapsto ghg^{-1}] \end{array}$$

Le stabilisateur de $g \in G$ est appelé centralisateur de g, et est noté $C(g)$.
L'ensemble des points fixes de cette action est le centre de G, noté $Z(G)$.

▸ G agit sur l'ensemble de ses sous-groupes par conjugaison :

$$\forall g \in G, \quad \forall H \leq G, \quad g \cdot H = gHg^{-1} := \{ghg^{-1} : h \in H\}$$

Le stabilisateur de $H \leq G$ est appelé normalisateur de H, et est noté $N(H)$.

Ex 2 : ▸ G est abélien si $G = Z(G)$, i.e. si G agit trivialement sur lui-même.

▸ $Z(GL_n(K)) = K I_n$

[U] 46 ▸ Soient $(i_1, \dots, i_k) \in \mathfrak{S}_n$ et $\gamma \in \mathfrak{S}_n$. On a $\gamma (i_1, \dots, i_k) \gamma^{-1} = (\gamma(i_1), \dots, \gamma(i_k))$.

▸ Dans $\mathfrak{S}_4$, $(2,4) \langle (1,2,3) \rangle (2,4)^{-1} = \langle (1,4,3) \rangle$.

[U] 46 Prop 3 : Deux permutations de $\mathfrak{S}_n$ sont conjuguées dans $\mathfrak{S}_n$ si et seulement si elles ont le même type, i.e. les mêmes listes décroissantes des longueurs des cycles intervenant dans leur décomposition en produit de cycles disjoints.
Cela décrit les classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_n$.

[R] 676 Thm 4 : Si K est algébriquement clos, alors les matrices triangulaires supérieures forment un système complet de représentants des classes de conjugaison de $GL_n(K)$, même de $\mathcal{M}_n(K)$. Autrement dit : toute matrice est trigonalisable.

Rq 5 : Trigonaliser (voire diagonaliser) une matrice simplifie les calculs de puissance, d'exponentielle, d'inverse …

II – Sous-groupes distingués

Def 6 : On dit que H est distingué dans G si H est fixe par l'action de G par conjugaison sur ses sous-groupes, i.e. $\forall g \in G$, $gHg^{-1} = H$. [R] ~3
On note $H \trianglelefteq G$.

Ex 7 : ▸ $\{1\}$ et G sont distingués dans G. [R] 3

▸ Si G est abélien, alors tout sous-groupe est distingué.

▸ $V_4 := \{e, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (2\,3)(1\,4)\} \trianglelefteq \mathfrak{S}_4$ [U] 51

Prop 8 : Une intersection de sous-groupes distingués dans G reste distinguée dans G. [U] 6 [R] 3

Prop 9 : Si $(G:H) = 2$, alors $H \trianglelefteq G$. [U] 25 [R] 30

Prop 10 : Le noyau d'un morphisme de groupes est distingué. [R] 3

Ex 11 : $\mathcal{A}_n \trianglelefteq \mathfrak{S}_n$ car $(\mathfrak{S}_n : \mathcal{A}_n) = 2$, ou $\mathcal{A}_n = \mathrm{Ker}(\varepsilon)$.

Def 12 : On dit que G est simple si ses seuls sous-groupes distingués sont $\{1\}$ et G. [U] 52

Ex 13 : Si $n \geq 5$, alors $\mathcal{A}_n$ est simple. [R] 50

Def 14 : Le groupe dérivé de G est [U] 10 [R] 12

$$D(G) = \langle \{[a,b] = aba^{-1}b^{-1} : (a,b) \in G^2\} \rangle$$

Prop 15 : $D(G) \trianglelefteq G$

III – Groupes quotients

Prop 16 : Si H est distingué, alors G/H possède une structure de groupe telle que la surjection canonique π_H est un morphisme de groupes : [R] 4

$$\forall (g_1, g_2) \in G^2, \quad (g_1 H)(g_2 H) = g_1 g_2 H$$

Rq 17 : Le cas échéant, cette structure est unique. [R] 4

Rq 18 : Réciproquement, si G/H possède une telle structure de groupe, alors $H = \mathrm{Ker}(\pi) \trianglelefteq G$. [R] 4

Ex 19 : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$,

[R] 13 **Prop 20** : $D(G)$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-groupe distingué H de G tel que G/H est abélien.

[R] 5 [U] 63 **Thm 21** (d'isomorphisme 1) : Soient $(G', \star)$ un groupe, et $\varphi : G \to G'$ un morphisme de groupes. Il existe un unique isomorphisme $\overline{\varphi} : G/\mathrm{Ker}(\varphi) \longrightarrow \mathrm{Im}(\varphi)$ rendant le diagramme ci-contre commutatif.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"] & G' \\ G/\mathrm{Ker}(\varphi) \arrow[r, "\overline{\varphi}"'] & \mathrm{Im}(\varphi) \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

[R] 5 **Cor 22** : Si les cardinaux en jeu sont finis, alors :

$$\#G = \#\mathrm{Ker}(\varphi)\,\#\mathrm{Im}(\varphi)$$

[U] 64 **Ex 23** : ▸ $GL_n(\mathbb{C})/SL_n(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^*$ (par det).

[U] 64 ▸ Tout groupe cyclique d'ordre n est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

[S] 232 **Thm 24** (d'isomorphisme 2) : Soient $H \trianglelefteq G$ et $K \leq G$. On a $H \cap K \trianglelefteq K$, $H \trianglelefteq HK = \{hk : h \in H, k \in K\} \leq G$, et $\frac{HK}{H} \simeq \frac{K}{H\cap K}$.

Ex 25 : ▸ $\mathfrak{S}_4/V_4 \simeq \mathfrak{S}_3$ $\quad (H = V_4\,,\ K = \langle (1,2), (2,3)\rangle)$

▸

[U] 64 [S] 232 **Thm 26** (d'isomorphisme 3) : Soient $K \leq H \trianglelefteq G$ tel que $K \trianglelefteq G$.

$$\frac{(G/K)}{(H/K)} \simeq G/H$$

Ex 27 : ▸ Soit $d \mid n$. On a $\frac{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}{d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

▸

IV – Application : groupes simples d'ordre 60

Soient p premier, $r \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $p \wedge m = 1$.

Prop 28 : Si $\#G = p^r$, alors $Z(G)$ n'est pas réduit à $\{1\}$. [R] 23

Cor 29 : Tout groupe d'ordre p^2, p premier, est abélien. **DEV 1** [R] 23

Def 30 : Supposons que $\#G = p^r m$. Un p-Sylow de G est un sous-groupe de G d'ordre p^r. On note $\mathrm{Syl}_p(G)$ l'ensemble des p-Sylow de G, et $n_p = \#\mathrm{Syl}_p(G)$. [U] 85

Thm 31 (de Sylow) [admis] : Supposons que $\#G = p^r m$. [U] 87

1 ▸ $\mathrm{Syl}_p(G) \neq \emptyset$ $\quad$ 2 ▸ Les p-Sylow de G sont conjugués dans G. [S] 275

3 ▸ $n_p \equiv 1\ [p]$ (donc $n_p \mid m$)

Cor 32 : $n_p = 1$ si, et seulement si l'unique p-Sylow de G est distingué. [S] 275

Thm 33 : Tout groupe simple d'ordre 60 est isomorphe à $\mathcal{A}_5$ **DEV 2** [S] 277 ~~[U] 90~~

RÉFÉRENCES :

[U] : Théorie des groupes (Félix Ulmer)

[R] : Mathématiques pour l'agrégation – Algèbre et géométrie (Jean-Étienne Rombaldi) [2e édition]

[S] : Algèbre pour la licence 3 (Szpirglas).