102

Groupe des nombres complexes de module 1. Racines de l'unité. Applications.

I - Les nombres complexes de module 1

Def 1 : L'ensemble des nombres complexes de module 1, aussi appelé cercle unité, est noté $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

A - Autour de l'exponentielle

[T] 43 ~45 ~45 **Def 2** : Pour $z \in \mathbb{C}$, on définit :

- $\exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ (l'exponentielle de z)
- $\sin(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$ (le sinus de z)
- $\cos(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$ (le cosinus de z)

[T] 43 45 ~44 **Prop 3** : ▸ exp, cos et sin sont des séries entières de rayon de convergence infini. En particulier, elles sont entières. De plus, $\exp' = \exp$.

- $\forall z \in \mathbb{C}$, $e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$
- $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $|e^{i\theta}| = 1$

[T] 44 44 **Prop 4** : ▸ $\theta \longmapsto e^{i\theta}$ est périodique. On note τ sa période. C'est un morphisme de groupes surjectif de $(\mathbb{R},+)$ dans $(S^1,\times)$.

- exp est un morphisme de groupes surjectif de $(\mathbb{C},+)$ dans $(\mathbb{C}^*,\times)$. Son noyau est $i\tau\mathbb{Z}$.

[T] 44 **Def 5** : $\pi = \tau/2$. Admis : π est transcendant sur $\mathbb{Q}$.

[T] 45 **Prop 6** : ▸ Formules d'EULER : $\forall z \in \mathbb{C}$, $\cos(z) = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} \in \mathbb{R}$, $\sin(z) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2i} \in \mathbb{R}$.

- Formule de MOIVRE : $\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$, $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.

Rq 7 : La formule de MOIVRE est fausse pour n non entier : $1 = (e^{2i\pi})^{\frac{1}{2}} \neq e^{i\pi} = -1$

- $\cos^2 + \sin^2 = 1$
- $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\cos(\theta) = \mathrm{Re}(e^{i\theta})$ et $\sin(\theta) = \mathrm{Im}(e^{i\theta})$

FIGURE 1

Appli 8 : Avec les formules de MOIVRE et d'EULER, pour tous $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $\cos(n\theta) \in \mathbb{R}[\cos(\theta)]$ et $\sin(n\theta) \in \mathbb{R}[\sin(\theta)]$.
(Appli : problème de trisection de l'angle - voir II.B)

Appli 9 : Polynômes de TCHEBYCHEV ($\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}$, $\cos(n\theta) = T_n(\theta)$)
($T_0 = 1$, $T_1 = X$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$)

Appli 10 : Noyaux de DIRICHLET et de FEJÉR : $\forall \theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, \forall N \in \mathbb{N}^*$,

$$D_N(\theta) := \sum_{n=-N}^{N} e^{in\theta} = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})\theta)}{\sin(\theta/2)}, \quad K_N(\theta) := \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_n(\theta) = \left(\frac{\sin(N\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\right)^2$$

Thm 11 : $\forall z \in S^1$, $\exists!\, \theta \in]-\pi,\pi]$: $z = e^{i\theta}$ [Rb] 101

Def 12 : Soit $z \in \mathbb{C}^*$. D'après Thm 11, il existe un unique $\theta \in]-\pi,\pi]$, appelé argument principal de z, noté $\mathrm{Arg}(z)$, tel que $z = |z|e^{i\theta}$. [Rb] 102
On appelle (un) argument de z tout réel θ tel que $z = |z|e^{i\theta}$. Les arguments de z sont congrus à $\mathrm{Arg}(z)$ modulo 2π.

Def 13 : On appelle détermination principale du logarithme complexe l'application [T] 63

$$\begin{aligned} \mathrm{Log} : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- &\longrightarrow B_\pi := \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Im}(z)| < \pi\} \\ z &\longmapsto \ln(|z|) + i\,\mathrm{Arg}(z) \end{aligned}$$

Prop 14 : exp induit une bijection de B_π sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, de réciproque Log.

Thm 15 (de relèvement) [admis] : Soient $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle et $k \in \mathbb{N}$. Pour toute $f \in C^k(I, S^1)$, il existe $\varphi \in C^k(I,\mathbb{R})$ telle que $f = e^{i\varphi}$.

B - Les racines de l'unité

Def 16 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $z \in \mathbb{C}$.

- On dit que z est une racine n^e de l'unité si $z^n = 1$. On note U_n l'ensemble des racines n^e de l'unité. [P] 80
- On dit que z est une racine de l'unité si $z \in U := \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} U_n$.

Prop 17 : $U_n = \{e^{i\frac{2k\pi}{n}} : k\in\mathbb{N}\} = \{e^{i\frac{2k\pi}{n}} : 0\leq k\leq n-1\} = \langle \omega_n\rangle$ où $\omega_n := e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

En particulier, $U_n \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Prop 18 : $\forall n\geq 2$, $\sum_{\omega\in U_n}\omega = 0$, $\omega_n^n = 1$, $\overline{\omega_n} = \omega_n^{n-1}$

[P] 80 Def 19 : Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On dit que $\zeta\in\mathbb{C}$ est une racine primitive ne de l'unité si $U_n = \langle\zeta\rangle$. On note μ_n^* l'ensemble des racines primitives ne de l'unité, i.e. des générateurs de U_n.

[P] 80 Prop 20 : $\mu_n^* = \{\omega_n^k : k\wedge n = 1\}$

FIGURE 2

Ex 21 : $U_2 = \{\pm 1\}$, $U_3 = \{1, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{-\frac{2i\pi}{3}}\} = \{1, \frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\}$, $U_4 = \{\pm 1, \pm i\}$

Prop 22 : Soit $(n,d)\in(\mathbb{N}^*)^2$.

- $U_d\subset U_n \iff d|n$
- $\#\mu_n^* = \varphi(n)$ (indicatrice d'Euler)

[P] 80 [Rb] 18
- $U_n = \bigsqcup_{d|n}\mu_d^*$
- $n = \sum_{d|n}\varphi(d)$

Rq 24 : Soient $a\in\mathbb{C}^*$ et $n\in\mathbb{N}^*$. Une racine ne de a est un nombre complexe z vérifiant $z^n = a$. Posons $z_0 := |a|^{\frac{1}{n}}\exp(i\frac{\mathrm{Arg}(a)}{n})$, de sorte que $z_0^n = a$. Si $z^n = a$, alors $\left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1$, i.e. $\frac{z}{z_0}\in U_n$, donc il existe $k\in[\![0,n-1]\!]$ tel que $z = z_0 e^{i\frac{2k\pi}{n}}$.

[Rb] ~114 +132 Thm 25 : Soit H un sous-groupe de S^1. Si H est fini d'ordre n, alors $H = U_n$, et sinon H est dense dans S^1.

[Rb] 132 Appli 26 : $\overline{\{\cos(n) : n\in\mathbb{N}\}} = \overline{\{\sin(n) : n\in\mathbb{N}\}} = [0,1]$

Thm 27 (de Niven) : Soit $r\in\mathbb{Q}$. Si $\cos(r\pi)\in\mathbb{Q}$, alors $r\in\{0,\frac{1}{3},\frac{1}{2}\}$.
Si $\sin(r\pi)\in\mathbb{Q}$, alors $r\in\{0,\frac{1}{6},\frac{1}{2}\}$

Cor 28 : $U\cap\mathbb{Q}[i] = \{\pm 1, \pm i\}$.

C - Polynômes cyclotomiques

Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

[P] 80 Def 29 : On appelle ne polynôme cyclotomique le polynôme $\Phi_n := \prod_{\zeta\in\mu_n^*}(X-\zeta)$

[P] ~81 Ex 30 : $\Phi_1 = X-1$, $\Phi_2 = X+1$, $\Phi_3 = X^2+X+1$, $\Phi_4 = X^2+1$, ...

[P] 80-83 Prop 31 :
- $\deg(\Phi_n) = \varphi(n)$
- $X^n - 1 = \prod_{d|n}\Phi_d$
- $\Phi_n\in\mathbb{Z}[X]$
- Φ_n est irréductible sur $\mathbb{Q}$
- Φ_n est le polynôme minimal de $\zeta\in\mu_n^*$ sur $\mathbb{Q}$.

Prop 32 : Pour tout p premier, $\Phi_p = \frac{X^p-1}{X-1} = X^{p-1}+X^{p-2}+\dots+X+1$.

Applications

[P] 82 Thm 33 (de Wedderburn) : Tout corps fini est commutatif.

[FGN] 213 Thm 34 (de Kronecker) : Soit $P\in\mathbb{Z}[X]$ unitaire dont toutes les racines sont de module ≤ 1, et tel que $P(0)\neq 0$. Alors toutes les racines de P sont des racines primitives de l'unité.

DEV 1

[Go] 95 Cor 35 (théorème de Kronecker) : Soit $P\in\mathbb{Z}[X]$ irréductible sur $\mathbb{Q}$. Si toutes les racines de P sont de module ≤ 1, alors $P = X$ ou P est cyclotomique.

II - Liens avec la géométrie

A - Notion d'angle orienté

On note $S^1(0,1)$ le cercle unité de $\mathbb{R}^2$ pour la norme euclidienne, qui s'identifie à S^1. Pour $z\in\mathbb{C}$, on note M_z le point de $\mathbb{R}^2$ d'affixe z.
On note $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$, que l'on décrète directe.

Prop 36 : $\forall(\vec{u},\vec{v})\in S^1(0,1)^2$, $\exists!\, r\in SO(\mathbb{R}^2)$: $\vec{v} = r(\vec{u})$

[P] ~146 Thm 37 : On dispose des isomorphismes de groupes :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} & \xrightarrow{\sim} & S^1 & \xrightarrow{\sim} & SO_2(\mathbb{R}) & \xleftarrow{\sim} & SO(\mathbb{R}^2) \\ \theta & \longmapsto & e^{i\theta} & \longmapsto & R(\theta) := \begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix} & \xleftarrow{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}} & r_\theta \end{array}$$

Cor 38 : La relation $(\vec{u},\vec{v})\,\mathcal{R}\,(\vec{u'},\vec{v'}) \iff \exists r\in SO(\mathbb{R}^2) : \begin{cases}\vec{u'} = r(\vec{u})\\ \vec{v'} = r(\vec{v})\end{cases}$ est une relation d'équivalence sur $(S^1)^2$.

[P] ~146 **Def 39** : Soit $(\vec{u},\vec{v}) \in (S^1)^2$.

- On appelle *angle orienté de $\vec{u}$ à $\vec{v}$* la classe d'équivalence de $(\vec{u},\vec{v})$ dans $(S^1)^2/\mathcal{R}$, que l'on note $\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$.

FIGURE 3

- Une *mesure* de $\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$ est un réel θ tel que $\vec{v} = r_\theta(\vec{u})$.
- La *mesure principale* de $\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$ est la mesure de $\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$ entre $-\pi$ et π.

Def 40 : On étend la définition aux couples de vecteurs non nuls $(\vec{u},\vec{v})$ en posant :

$$\widehat{(\vec{u},\vec{v})} := \widehat{\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right)}$$

Rq 41 : Si $z_{\vec{u}}$ est l'affixe de $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$, alors l'affixe de $r_\theta(\vec{u})$ est $e^{i\theta} z_{\vec{u}}$.

Rq 42 : En notant $\langle \cdot | \cdot \rangle$ le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^2$, on appelle *écart angulaire* entre deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel $\alpha = \arccos\left(\frac{\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}\right)$. Si θ est la mesure principale de $\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$, alors $\alpha = |\theta|$. Plus précisément, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens (resp. de sens opposé), alors $\alpha = \theta = 0$ (resp. $\alpha = \theta = \pi$) et sinon, si $(\vec{u},\vec{v})$ est directe, alors $\alpha = \theta$, et sinon $\alpha = -\theta$.

[Bu] ~497 **Prop 43** : Une mesure de $\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$ est un réel θ vérifiant $e^{i\theta} = \frac{\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle + i \det_B(\vec{u},\vec{v})}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$

Def 44 : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls d'écart angulaire α. On dit que $\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$ est *nul* si $\alpha = 0$, *plat* si $\alpha = \pi$, *droit* si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, *aigu* si $\alpha < \frac{\pi}{2}$ et *obtus* si $\alpha > \frac{\pi}{2}$.

B- Autour des polygones réguliers – groupes diédraux, constructibilité

Soit $n \geqslant 3$.

Def 45 : Le *polygone régulier à n côtés* est le polygone convexe P_n du plan dont les sommets sont, dans l'ordre, les points d'affixes $1, \omega_n, \omega_n^2, \dots, \omega_n^{n-1}$.

Def/Prop 46 : L'ensemble des isométries du plan conservant P_n est un groupe, appelé *groupe diédral d'ordre $2n$*, noté D_{2n}. Il est engendré par la rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$ centrée à l'origine (correspondant à $z \longmapsto \omega_n z$ en termes d'affixes) et la symétrie d'axe (Ox) (correspondant à la conjugaison en terme d'affixes).

Def 47 : On dit que $z \in \mathbb{C}$ est *constructible* si on peut tracer l'image de z dans le plan uniquement avec un compas et une règle non graduée. [P] 68
On dit P_n est constructible si ω_n l'est.

Thm 48 (de Gauss-Wantzel) : P_n est constructible si, et seulement si n est de la forme $n = 2^m p_1 \cdots p_r$, avec $m \in \mathbb{N}$ et $p_1 \cdots p_r$ des nombres premiers de Fermat, i.e. $3, 5, 17, 257, 65\,537$.

FIGURES 2, 4

C - Application : une caractérisation de 7

Thm 49 (de Gauss-Lucas) : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. DEV 2 [FGN] 229

$$Z_{\mathbb{C}}(P') \subset \mathrm{Conv}(Z_{\mathbb{C}}(P))$$

où, si $Z_{\mathbb{C}}(P) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$, alors :

$$\mathrm{Conv}(Z_{\mathbb{C}}(P)) = \left\{ \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \alpha_k \ : (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in [0,1]^r, \ \sum_{k=1}^{r} \lambda_k = 1 \right\}$$

Appli 50 : 7 est le plus grand entier $n \geqslant 2$ tel que : [FGN] 229

$$Z_{\mathbb{C}}((X+1)^n - X^n - 1) \subset \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$$

RÉFÉRENCES

[Rb] Rombaldi *Algèbre et géométrie*
[P] Perrin
[FGN] Oraux X-ENS, Algèbre 1 [2e édition]
[T] Tauvel *Analyse complexe*
[Rb] Rombaldi *Éléments d'analyse réelle*
[B] Burg

FIGURE 1

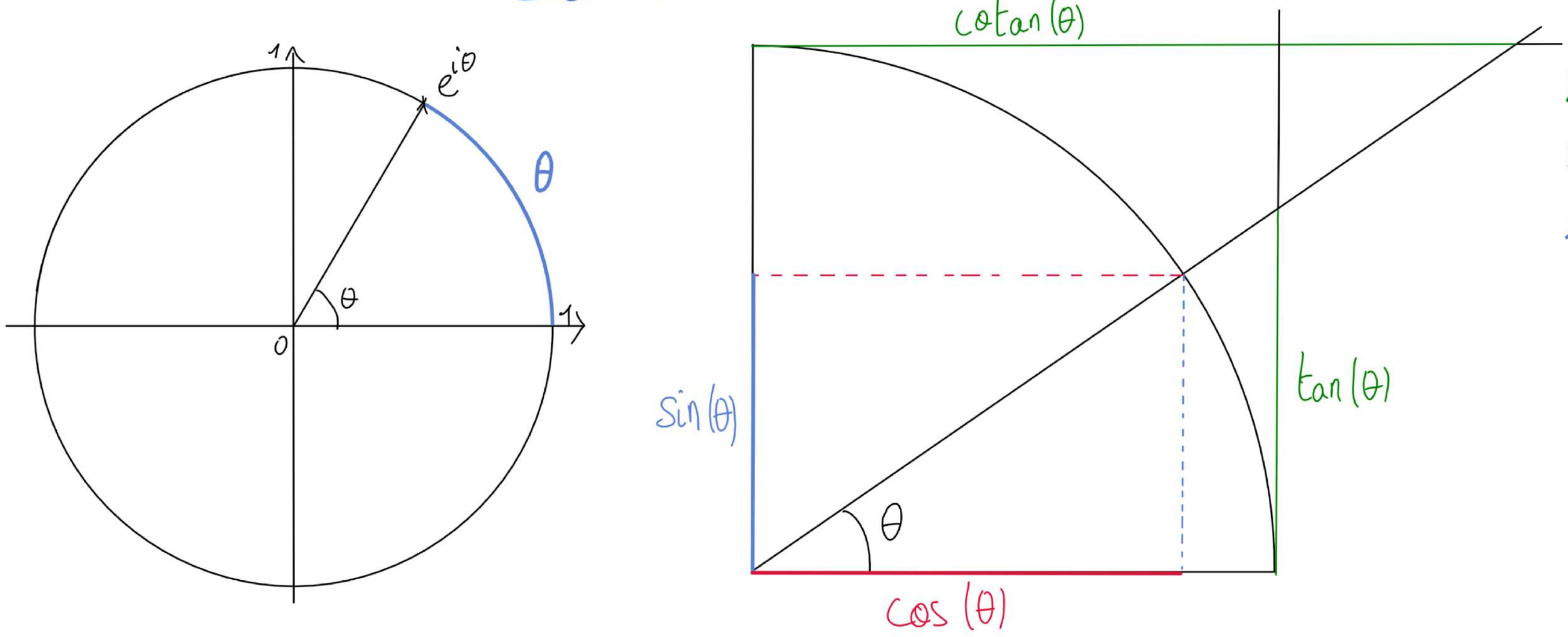

FIGURE 2

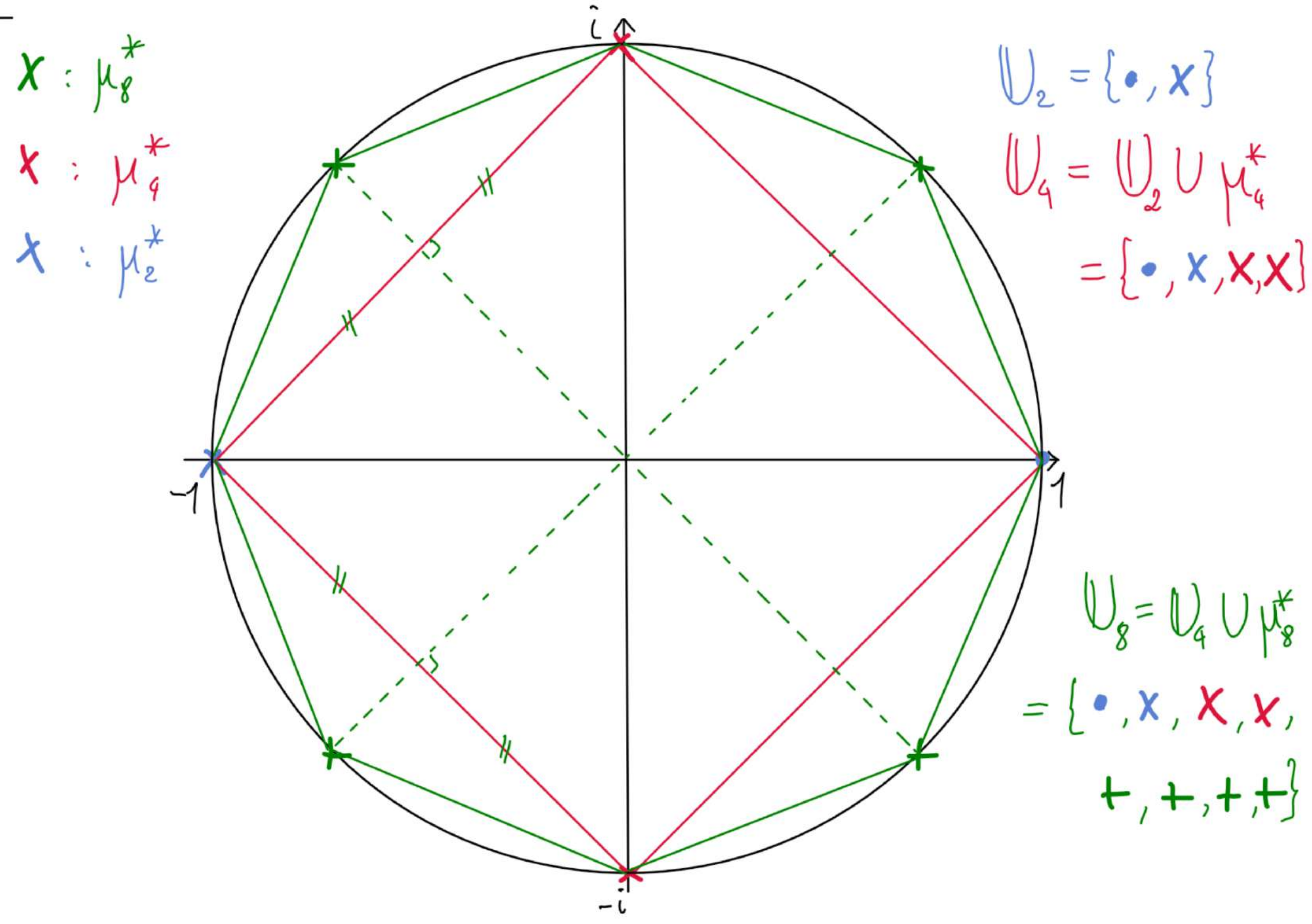

FIGURE 3

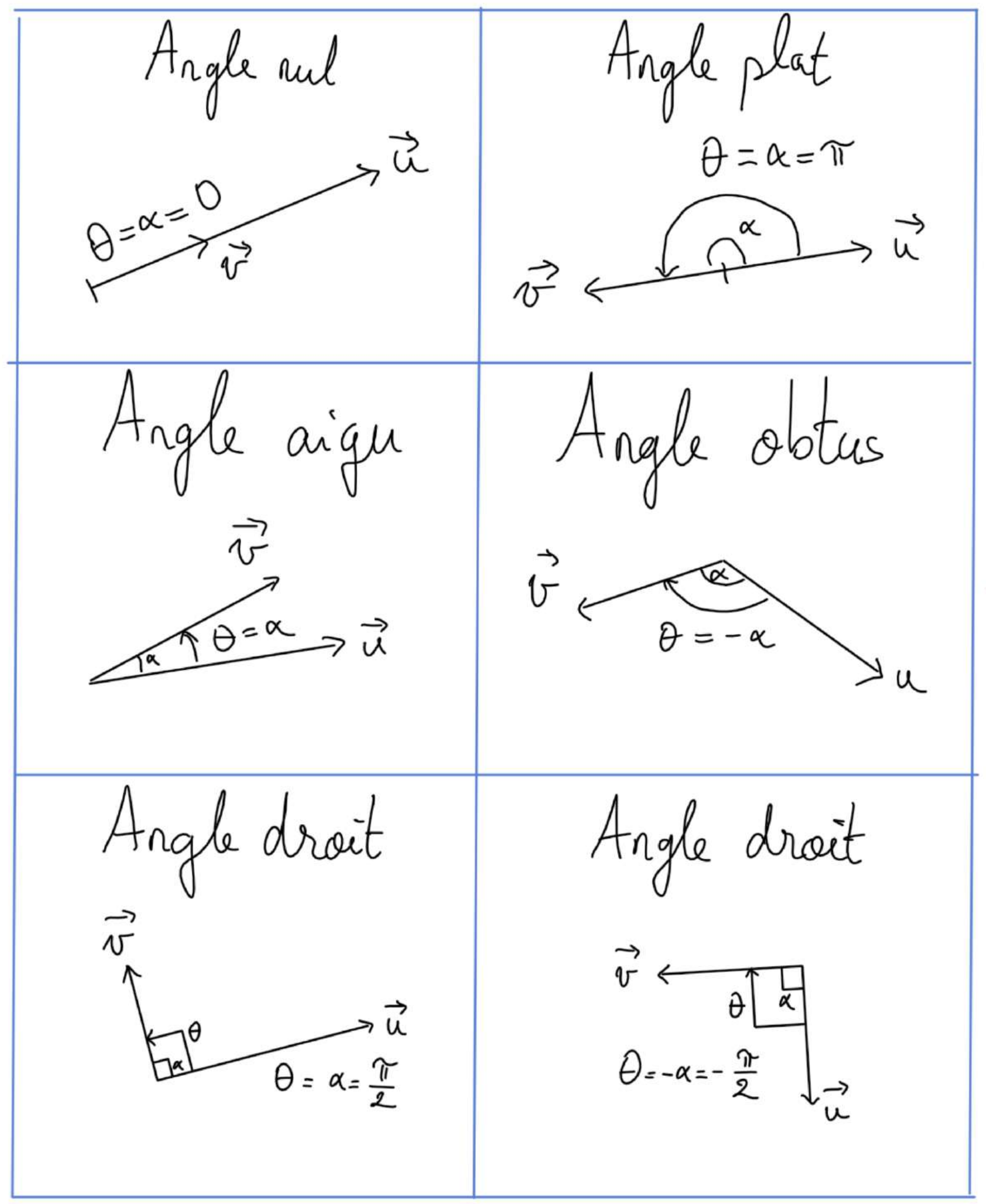

FIGURE 4