101

Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

Dans cette leçon, G désigne un groupe de neutre 1, et X désigne un ensemble.

I - Action d'un groupe sur un ensemble

A - Définition et premiers exemples

[R] 19 [U] 27 **Def 1** : Une action de G sur X est une application $\begin{array}{l} G\times X \longrightarrow X \\ (g,x) \longmapsto g\cdot x \end{array}$ vérifiant :

1▸ $\forall (g,g') \in G^2$, $\forall x \in X$, $g'\cdot(g\cdot x) = (g'g)\cdot x$

2▸ $\forall x \in X$, $1\cdot x = x$.

Pour signifier que G agit sur X, on note $G \circlearrowright X$.

[R] 19 [U] 28 **Ex 2** : ▸ $\mathfrak{S}(X) \circlearrowright X$ par $\sigma\cdot x = \sigma(x)$

▸ Si E est un espace vectoriel, alors $GL(E) \circlearrowright E$ par $\varphi\cdot x = \varphi(x)$.

▸ $(g,x) \longmapsto x$ est une action de G sur X, appelée action triviale.

[R] 19 [U] 28 **Prop/Def 3** : La donnée d'une action $(g,x) \mapsto g\cdot x$ de G sur X équivaut à la donnée d'un morphisme $\varphi : G \longrightarrow \mathfrak{S}(X)$, $g \longmapsto [x \mapsto g\cdot x]$, appelé morphisme associé à l'action de G sur X.

À partir de maintenant, φ désigne implicitement le morphisme associé à l'action de G sur X que l'on considère.

[R] 19 21 [U] 29 **Def 4** : Soit $x \in X$.

▸ L'orbite de x est l'ensemble $\mathrm{Orb}(x) = \{g\cdot x : g \in G\}$ (aussi noté $G\cdot x$)

▸ Le stabilisateur de x est l'ensemble $\mathrm{Stab}(x) = \{g \in G \mid g\cdot x = x\}$.

[U] 34 37 **Rq/Def 5** : ▸ $G \circlearrowright G$ par $g\cdot h = ghg^{-1}$ (on l'appelle action par conjugaison). Le stabilisateur de $h \in G$ est plutôt appelé centralisateur de h, et est noté $C(h)$.

▸ G agit sur l'ensemble de ses sous-groupes par $g\cdot H = gHg^{-1}$ (action par conjugaison). Le stabilisateur de $H \leq G$ est plutôt appelé normalisateur de H, et est noté $N(H)$.

Def 6 : ▸ On dit que l'action de G sur X est transitive si elle n'a qu'une seule orbite, i.e. si $\forall (x,y) \in X^2$, $\exists g \in G : y = g\cdot x$. [R] 20 [U] 29 31

▸ On dit que l'action de G sur X est fidèle si φ est injective.

Ex 7 : ▸ $\mathfrak{S}_n \circlearrowright [\![1,n]\!]$ transitivement par $\sigma\cdot i = \sigma(i)$

▸ $G \circlearrowright G$ fidèlement par $g\cdot h = gh$ (on l'appelle action par translation à gauche). [U] 31

▸ Soit H un sous-groupe de G. L'action de G sur G/H définie par $g\cdot xH = gxH$, appelée action par translation à gauche, est transitive.

Prop 8 : Pour tout $x \in X$, $\mathrm{Stab}(x)$ est un sous-groupe de G. [R] 21

Prop 9 : $x \mathcal{R} y \iff \exists g \in G : y = g\cdot x$ définit une relation d'équivalence sur X dont les classes sont les orbites de l'action de G sur X. [U] 30

Cor 10 : Les orbites partitionnent X. [U] 30

Ex 11 : Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Le groupe $\langle\sigma\rangle$ agit sur $[\![1,n]\!]$ par $\sigma^k\cdot i = \sigma^k(i)$. [U] 41
Les orbites non ponctuelles sont les supports des cycles dans la décomposition en produit de cycles à supports disjoints de σ.

B - Cas d'un groupe et d'un ensemble finis

Dans ce paragraphe, on suppose G et X finis. On pose $n = \#G$.

Thm 12 (de Cayley) : G s'identifie à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$. [R] 21 [U] 31

Prop 13 : $\forall (x,y) \in X^2$, $y \in \mathrm{Orb}(x) \Rightarrow \exists g \in G : \mathrm{Stab}(y) = g\,\mathrm{Stab}(x)\,g^{-1}$.

[R] 21 **Thm 14** (relation orbite-stabilisateur) : Pour tout $x \in X$, $G/_{\mathrm{Stab}(x)}$ et $\mathrm{Orb}(x)$ sont équipotents (cela reste vrai si G est infini). Par conséquent,

$$\# G = \# \mathrm{Stab}(x) \, \# \mathrm{Orb}(x).$$

[R] 21 **Thm 15** (équation aux classes) : $\# X = \sum_{i=1}^{r} \# \mathrm{Orb}(x_i) = \sum_{i=1}^{r} \frac{\# G}{\# \mathrm{Stab}(x_i)}$ avec $\{x_1, \dots, x_r\}$ un système de représentants pour les orbites.

[R] 22 **Ex 16** : Si $\# G$ est une puissance d'un nombre premier, alors son centre $Z(G) := \{g \in G \mid \forall h \in G,\ ghg^{-1} = h\}$ n'est pas réduit à $\{1\}$.

[R] 23 **Corollaire** : tout groupe d'ordre p^2 (avec p premier) est abélien.

[R] 35 **Thm 17** (formule de Burnside) : L'action de G sur X possède $\frac{1}{\# G} \sum_{g \in G} \# \mathrm{Fix}(g)$ orbites, où $\mathrm{Fix}(g) = \{x \in X \mid g \cdot x = x\}$.

[C] 132 **Ex 18** : En moyenne, une permutation de $[\![1,n]\!]$ tirée aléatoirement a 1 point fixe.

[C] 132 **Ex 19** : Si G n'est pas abélien, alors la probabilité de tirer simultanément deux éléments qui commutent vaut $\frac{k}{n}$, avec k le nombre de classes de conjugaison de G.

[R] 23 **Thm 20** (de Cauchy) : Soit p un nombre premier. Si $p \mid \# G$, alors G admet un élément d'ordre p.

II - Applications

A - En géométrie : les isométries des polytopes

Thm 21 : L'ensemble des isométries du plan conservant un triangle équilatéral [R] 94
est un groupe isomorphe à $\mathfrak{S}_3$.

Prop 22 : Soit $\mathcal{C}$ un cube. L'ensemble des isométries de l'espace conservant [R] 82
$\mathcal{C}$ est un groupe, noté $\mathrm{Is}(\mathcal{C})$. On note $\mathrm{Is}^+(\mathcal{C})$ le sous-groupe de $\mathcal{C}$ formé de rotations.

Thm 23 : $\boxed{\mathrm{Is}^+(\mathcal{C}) \simeq \mathfrak{S}_4 \text{ et } \mathrm{Is}(\mathcal{C}) \simeq \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$ DEV 1 [R] 85

Thm 24 : En notant $\mathcal{T}$ le tétraèdre régulier, on a : [R] 95

$$\mathrm{Is}(\mathcal{T}) \simeq \mathfrak{S}_4 \quad \text{et} \quad \mathrm{Is}^+(\mathcal{T}) \simeq \mathcal{A}_4$$

B - Du côté des matrices

Dans ce paragraphe, K est un corps. On fixe $(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

Prop 25 : Les applications suivantes sont des actions :

1. Translation à gauche : $GL_n(K) \times \mathcal{M}_{n,m}(K) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,m}(K)$; $(P, A) \longmapsto PA$ [R] 184
2. Translation à droite : $GL_m(K) \times \mathcal{M}_{n,m}(K) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,m}(K)$; $(P, A) \longmapsto AP^{-1}$ 185
3. Similitude (ou conjugaison) : $GL_n(K) \times \mathcal{M}_n(K) \longrightarrow \mathcal{M}_n(K)$; $(P, A) \longmapsto PAP^{-1}$ 199
4. Équivalence (ou action de Steinitz) : 195
   $$(GL_n(K) \times GL_m(K)) \times \mathcal{M}_{n,m}(K) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,m}(K) \ ; \ ((P,Q), A) \longmapsto PAQ^{-1}$$ 206
5. Congruence : $GL_n(K) \times \mathcal{M}_n(K) \longrightarrow \mathcal{M}_n(K)$; $(P, A) \longmapsto {}^tPAP$.

[R] 184 185 ? 195 207 Prop 26 : Dans l'ordre de la proposition précédente, les orbites sont caractérisées par : 1▸ le noyau de A ; 2▸ l'image de A ; 3▸ les polynômes minimal et caractéristique de A ; 4▸ ça dépend de K...

Ex 27 : Diag(1,2,2) et Diag(1,1,2) ont même polynôme minimal mais ne sont pas semblables : il faut donc bien les deux informations !

C- Théorèmes de Sylow

Dans ce paragraphe, on se donne p premier, et on note $\# G = p^\alpha m$, $m \wedge p = 1$.

[U] 85 Def 28 : Un p-Sylow de G est un sous-groupe de G de cardinal p^α.

Notation : $Syl_p(G)$ désigne l'ensemble des p-Sylow de G, et $n_p = \# Syl_p(G)$.

[U] 87 Thm 29 (de Sylow) : 1▸ $Syl_p(G) \neq \emptyset$

2▸ G agit transitivement sur $Syl_p(G)$ par conjugaison

3▸ $n_p \equiv 1 \, [p]$ (donc $n_p \mid m$).

Def 30 : On dit que G est simple si les seuls sous-groupes de G distingués (i.e. fixe par l'action par conjugaison de G) sont $\{1\}$ et G.

[S] 277 Thm 31 : Si G est simple et d'ordre 60, alors $G \simeq \mathcal{A}_5$. DEV 2

RÉFÉRENCES :

[U] : Théorie des groupes (Félix Ulmer)

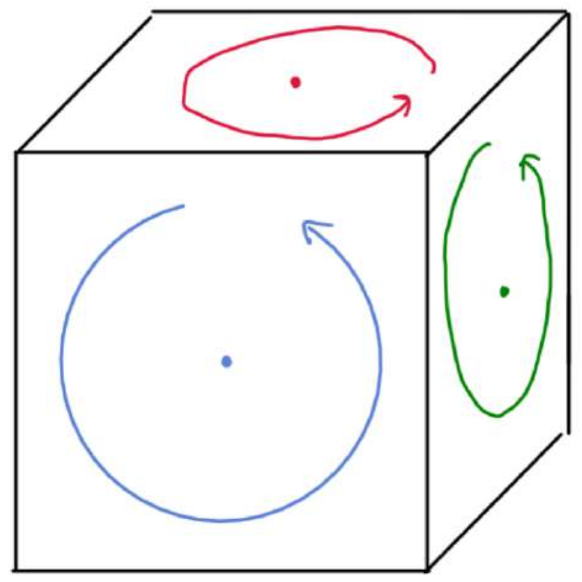
[R] : Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie (Jean-Étienne Rombaldi) [2e édition]

[S] : Algèbre pour la licence 3 (Szpirglas).

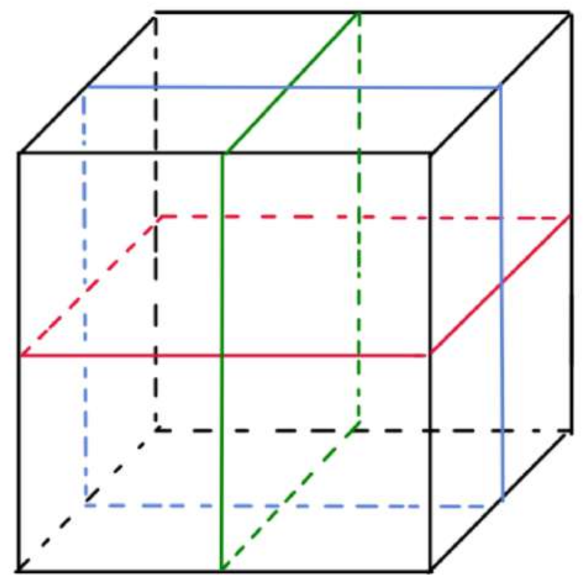
[C] : Carnets de voyage en Algébrie (Caldero)

FIGURE : Isométries du cube

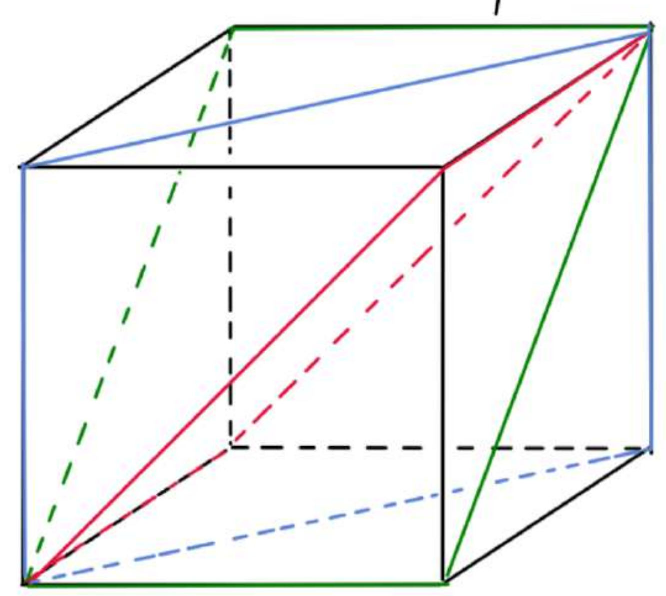
Rotations passant par les faces



Symétries coupant les faces

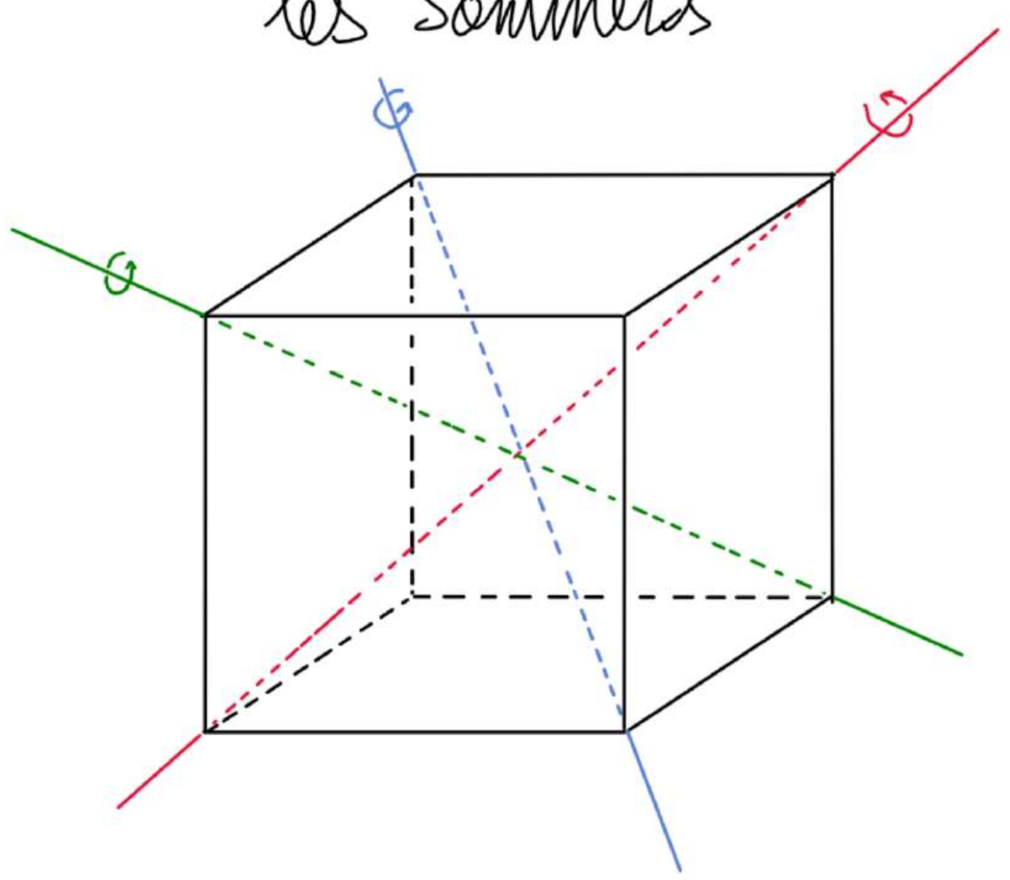


Symétries passant par une arête



(pas toutes représentées)

Rotations passant par les sommets



Rotations passant par les arêtes