206

Exemples d'utilisation de la notion de dimension finie en analyse.

I - Topologie des espaces vectoriels normés de dimension finie

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie $n \geq 1$.

Prop 1 : $\|\cdot\| : (E, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ est continue.

[Go] 50

Prop 2 : Les compacts de E sont les fermés bornés

Thm 3 : Toutes les normes sur E sont équivalentes. **DEV 1**

Cor 4 : Toute application linéaire sur E est continue.

Cor 5 : E est complet (pour n'importe quelle norme)

[Go] ~33 **Cor 6** : Une application continue sur E et coercive admet un minimum.

[Go] 50 **Cor 7** : Tout sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel quelconque est fermé

[Go] ~33 **Appli 8** : Soit M un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel normé $(F, \|\cdot\|)$. Pour tout $y \in F$, il existe $x \in M$ tel que $d(x,F) = \|x-y\|$.

[Go] 56 **Thm 9** (de Riesz) : $\dim(E) < +\infty \iff \overline{B_E(0,1)}$ est compacte. **DEV 1**

Appli 10 : En dimension infinie, il n'existe pas de mesure positive, invariante par translation et telle que tout point admet un voisinage de mesure finie, autre que la mesure nulle.

[Go] ~30 **Prop 11** : Une suite en dimension finie converge si, et seulement si elle est bornée et et admet une unique valeur d'adhérence.

II - Applications différentiables sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$

A - Dérivées partielles : le point de vue matriciel

Soient $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $a \in U$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ une base de $\mathbb{R}^p$, $f_1, \dots, f_p$ les applications coordonnées de f dans $\mathcal{B}'$.

Def 12 : On dit que f admet une j^e dérivée partielle dans $\mathcal{B}$ en a si $\partial_j f(a) := \frac{\partial f}{\partial e_j}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[f(a+te_j) - f(a)]$ existe. [Go] 325

Prop 13 : Si f est différentiable en a, alors f admet des dérivées partielles suivant chaque e_j. [Go] 325

Def 14 : Si f admet en a des dérivées partielles suivant chaque e_j, alors on définit la (matrice) jacobienne de f en a : $\mathrm{Jac}_a(f) = (\partial_j f_i(a))_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n}$. [Go] 327

Prop 15 : $\mathrm{Jac}_a(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(df(a))$: en particulier, $\forall h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $df(a)(h) = \mathrm{Jac}_a(f) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$. [Go] 327

Prop 16 (règle de la chaîne) : Sous les hypothèses d'existence, $\mathrm{Jac}_a(g \circ f) = \mathrm{Jac}_{f(a)}(g) \times \mathrm{Jac}_a(f)$, i.e. $\frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial e_j}(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial \varepsilon_k}(f(a)) \times \frac{\partial f_k}{\partial e_j}(a)$. [Go] 327

Prop 17 : Les dérivées partielles dans $\mathcal{B}$ de f existent et sont continues sur U si, et seulement si f est de classe C^1 sur U. [Go] ~325

Rq 18 : Si f est deux fois différentiable sur U, alors $d^2 f$ s'identifie à une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n$. [Rv] 294

Def 19 : Sous réserve d'existence, les dérivées partielles d'ordre 2 de f dans $\mathcal{B}$ en a sont les vecteurs $\frac{\partial^2 f}{\partial e_i \partial e_j}(a) := \frac{\partial}{\partial e_i}\left[\frac{\partial f}{\partial e_j}\right](a)$. [Go] 326

Thm 20 (de Schwarz) : Si f est deux fois différentiable en a, alors pour [Rv] 294 tout $1\le i,j\le n$, $\frac{\partial^2 f}{\partial e_i \partial e_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial e_j \partial e_i}$.

B - Optimisation

Supposons désormais que $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^2.

[Go] 324 **Def 21** : On appelle gradient de f en a l'unique $\nabla f(a) \in \mathbb{R}^n$ tel que $df(a) = \langle \cdot \mid \nabla f(a) \rangle$.

[Go] 325 **Prop 22** : $df(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial e_k}(a)\, e_k^*$ et si $\mathcal{B}$ est orthonormale, $\nabla f(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial e_k}(a)\, e_k$.

[Rv] 294 **Def 23** : On appelle (matrice) hessienne de f en a la matrice $\mathrm{Hess}_a(f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial e_i \partial e_j}(a) \right)_{1 \le i,j \le n}$

Rq 24 : $\mathrm{Hess}_a(f)$ est la matrice dans $\mathcal{B}$ de la forme bilinéaire $d^2f(a)$: en particulier, pour tous $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ et $k = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $d^2f(a)(h)(k) = {}^t h \cdot \mathrm{Hess}_a(f) \cdot k$.

[Go] 336 **Def 25** : On dit que a est un point critique si $df(a) = 0$.

[Go] 335-336 **Thm 26** :
- Si f admet un maximum (resp. un minimum) local en a, alors a est un point critique, et $\mathrm{Hess}_a(f)$ est négative (resp. positive).
- La réciproque est vraie si on suppose en plus $\mathrm{Hess}_a(f)$ définie

[BMP] 24-32 **Ex 27** : Soient $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. La solution de $Ax = b$ est le minimum global de $J : x \longmapsto \frac{1}{2}\langle Ax \mid x \rangle - \langle b \mid x \rangle$.

[Rv] 372 **Thm 28** (des extrema liés) : Soit $(f, g_1, \dots, g_r) \in C^1(U, \mathbb{R})^{r+1}$, posons $\Gamma = \{x \in U \mid g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$. Si $f_{|\Gamma}$ admet un extremum local en $a \in \Gamma$, et si $(dg_1(a), \dots, dg_r(a))$ est libre, alors il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r$ tel que $df(a) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, dg_k(a)$.

[Rv] 413 **Ex 29** : Existence d'une trajectoire fermée à 3 rebonds sur un billard elliptique.

[Rv] 374 **Rq 30** : Chercher un extremum revient à résoudre le système carré $n+r$:

$$\left\{ \forall i \in [\![1,n]\!],\ \frac{\partial f}{\partial e_i}(a) = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{\partial g}{\partial e_k}(a) \quad ; \quad g_1(a) = \dots = g_r(a) = 0 \right.$$

III - Équations différentielles linéaires

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $A : I \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ continue, $b : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continue, $(E) : y' = Ay + b$ et $(H) : y' = Ay$.

Rq 31 : Résoudre $y^{(p)} + P(\frac{d}{dt})(y) = b$ où $P = \sum_{k=0}^{p-1} A_k X^k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})[X]$ [Go] 377
revient à résoudre $Y' = C_p Y + B$ où :

$$Y = \begin{pmatrix} y^{(p-1)} \\ \vdots \\ y \end{pmatrix}, \quad C_p = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -A_0 \\ I_n & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & I_n & -A_{p-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Prop 32 : $S_I(H)$ est un sous-espace vectoriel de $C^1(I, \mathbb{R}^n)$, et $S_I(E)$ un sous-espace affine. [Go] 378

DEV 2

Thm 33 (de Cauchy-Lipschitz linéaire) : Soit $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$. Il existe une unique solution y de (E) définie sur I telle que $y(t_0) = y_0$. [Be] 66 [Go] 378

Cor 34 : Soit $t_0 \in I$. L'application $\varphi_{t_0} : S_I(H) \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $y \longmapsto y(t_0)$ est un isomorphisme (d'espaces vectoriels). En particulier, $\dim(S_I(H)) = n$. [Go] 378

Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^n$. Soit $(h_1, \dots, h_n) \in S_I(H)^n$.

Def 35 : Le wronskien de $(h_1, \dots, h_n)$ dans $\mathcal{B}$ est : [Go] 378

$$W : t \in I \longmapsto \det_{\mathcal{B}}(h_1(t), \dots, h_n(t))$$

Thm 36 : $(h_1, \dots, h_n)$ est une base de $S_I(H) \iff \forall t \in I, W(t) \neq 0$ [Go] 379
$\iff \exists t \in I : W(t) \neq 0$

Ex 37 : Soient $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\omega > 0$ tels que $f'' + \omega^2 f \ge 0$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) + f(x + \frac{\pi}{\omega}) \ge 0$.

IV - Approximation de fonctions

A - Séries de Fourier

On note $C^0_{2\pi}$ (resp. $L^p_{2\pi}$) l'espace des fonctions 2π-périodiques de C^0 (resp. L^p).

[EA] 196 Thm 38 (de Dirichlet) : Soient f C^1 par morceaux 2π-périodique et $x \in \mathbb{R}$. Pour $N \in \mathbb{N}$, on pose $S_N(f) : t \longmapsto \sum_{n=-N}^{N} e^{int} \int_0^{2\pi} f(u) e^{-inu} du$. Alors :

$$S_N(f)(x) \xrightarrow[N \to +\infty]{} \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

[EA] 190 Thm 39 (de Fejér) : Pour $N \in \mathbb{N}^*$ et $f \in L^1_{2\pi}$, on pose $\sigma_N(f) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n(f)$.

1. Si $f \in C^0_{2\pi}$, alors $\|\sigma_N(f) - f\|_\infty \longrightarrow 0$.
2. Si $f \in L^2_{2\pi}$, alors $\|\sigma_N(f) - f\|_2 \longrightarrow 0$.

Cor 40 : $\mathrm{Vect}(\{t \mapsto e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}})$ est dense dans $C^0_{2\pi}$ et $L^2_{2\pi}$.

Thm 41 : $\{t \longmapsto e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$.

[EA] 193 Cor 42 : $\forall f \in L^2_{2\pi}$, $\|S_N(f) - f\|_2 \longrightarrow 0$

B - Approximation polynomiale

[Go] 235 Thm 43 (de Weierstrass) : Toute fonction continue sur un segment est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.

Appli 44 : Soit $f \in C^0([a,b], \mathbb{R})$. Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_a^b t^n f(t) dt = 0$, alors $f = 0$.

[Dem] 23 Prop 45 : Soit $f \in C^{n+1}([a,b], \mathbb{R})$, soient $x_1, \dots, x_n \in [a,b]$ distincts. Notons P le polynôme d'interpolation de Lagrange de $(x_1, \dots, x_n)$ en $(f(x_1), \dots, f(x_n))$. Pour tout $x \in [a,b]$, $|f(x) - P(x)| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} \prod_{j=1}^{n} |x - x_j|$.

Références

[Go] Gourdon, *Analyse* [3e édition]

[Rv] Rouvière [4e édition]

[BMP] *Objectif agrégation*

[EA] El Amrani, *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*

[Dem] Demailly