206 - Exemples d'utilisation de la notion de dimension finie en analyse.

Soit $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé (evn)

I. Espaces vectoriels normés en dimension finie.

1. Compacité.

[Li] 15 déf 1: Deux normes N_1 et N_2 sur E sont dites équivalentes s'il existe $a,b>0$ tels que $\forall x\in E, aN_1(x)\leq N_2(x)\leq bN_1(x)$

ex 2: • Dans $\mathbb{K}^n$, les normes $\|\cdot\|_p$ sont équivalentes (avec $p\in[1,+\infty]$) et de plus, $\forall x\in\mathbb{K}^n$,
$$\|x\|_\infty\leq\|x\|_p\leq\|x\|_1\leq n\|x\|_\infty.$$
• Dans $\mathcal{C}^0([0,1])$, les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ ne sont pas équivalentes.

th 3: DVP1 Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

cor 4: Tout evn de dimension finie n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$, muni d'une de ses normes usuelles.

th 5: (de Riesz)
DVP1 La boule unité fermée de E est compacte ssi E est de dimension finie.

prop 6: Les parties compactes d'un evn de dimension finie sont les parties fermées bornées.

[P] 57 ex 7: Dans $\mathbb{R}$, les compacts sont les segments.

♡ prop 8: En dimension finie, une suite bornée converge ssi elle admet une seule valeur d'adhérence.

♡ ex 9: La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée mais diverge.

2. Applications linéaires.

[G] 48 th 10: Soient E et F deux $\mathbb{K}$-evn. Soit $f: E\to F$ une application linéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :
- f est continue sur E.
- f est continue en 0.
- f est bornée sur la boule unité fermée de E.
- f est bornée sur la sphère unité de E.
- $\exists M>0, \forall x\in E, \|f(x)\|_F\leq M\|x\|_E$.
- f est uniformément continue.

prop 11: Toute application linéaire d'un evn de dimension finie dans un evn quelconque est continue.

ex 12: L'application linéaire $\begin{array}{l}\mathbb{R}[X]\to\mathbb{R}[X]\\ P\mapsto P'\end{array}$ n'est pas continue pour la norme $\|P\|=\|\sum_{i\geq0}a_iX^i\|=\sup_{i\geq0}|a_i|$.

3. Complétude.

prop 13: Tout evn de dimension finie est complet.

prop 14: Tout sous-espace vectoriel de dimension finie d'un evn est fermé.

ex 15: Tout evn à base dénombrable n'est pas complet.

prop 16: Un evn est complet ssi toute série absolument convergente est convergente.

th 17: (du point fixe)
En dimension finie, toute application contractante admet un unique point fixe. 21

II. Calcul différentiel.

1. Différentielle et dérivée partielle. 323

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-evn. Soit U un ouvert de E. Soit $a\in U$. Soit $f: U\to F$ une application.

déf 18: On dit que f est différentiable en a s'il existe $\ell\in\mathcal{L}_c(E,F)$ telle que
$$f(a+h)=f(a)+\ell(h)+\underset{h\to0}{o}(\|h\|).$$
Si ℓ existe alors ℓ est unique et s'appelle la différentielle de f en a et est notée df_a.

rem 19: La différentiabilité et la différentielle ne dépendent que de la topologie d'evn. de E et de F. Donc, pour des normes équivalentes (sur E et F resp.) la différentiabilité et la différentielle ne changent pas.
En dimension finie, df_a est continue car linéaire.

206-2

A partir d'ici $E=\mathbb{R}^n$.

déf20 : Soit $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Si f est dérivable en a selon e_i (i.e. $t\mapsto f(a+te_i)$ est dérivable en $t=0$) alors on dit que f admet une dérivée partielle en a et on note $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)=\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} f(a+te_i)-f(a)$

th21 : Si toutes les dérivées partielles de f sur U existent et sont continues en un point a de U, alors f est différentiable en a et on a
$$df_a=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)dx_i.$$

[P] 369 th22 : L'application $f:U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ssi elle admet des dérivées partielles continues en tout point de U.

[G] 327 prop23 : Soient $f:U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ et $\varphi:V\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ où U et V sont des ouverts tels que $\varphi(V)\subset U$. Écrivons $\varphi=(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ où $\varphi_i:V\to\mathbb{R}$. Si φ est différentiable en $a\in V$ et si f est différentiable en $\varphi(a)$. Alors, l'application $F=f\circ\varphi:V\to\mathbb{R}$ est différentiable en a et $\forall j\in[\![1,m]\!]$,
$$\frac{\partial F}{\partial u_j}(a)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(a)).\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}(a).$$

343 th24 : (d'inversion locale)
Si $f:U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ est de classe $\mathcal{C}^p$ et si df_a est inversible, alors il existe $V\subset U$ un voisinage de a et W un voisinage de $f(a)$ tels que $f_{|V}:V\to W$ soit un $\mathcal{C}^p$-difféomorphisme.

rem25 : En pratique, il suffit de vérifier que le déterminant de la jacobienne de f en a soit non nul.

347 ex26 : $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}^2$, $(x,y)\mapsto(x^2-y^2,2xy)$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme en tout point de $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

2. Équations différentielles linéaires.

th27 : (de Cauchy-Lipschitz linéaire). 378

DVP2 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $A:I\to\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $b:I\to\mathbb{R}^n$ continues. Alors, $(E):\begin{cases} y'=A(t)y+b(t)\\ y(0)=y_0\in\mathbb{R}^n\end{cases}$ admet une unique solution définie sur I.

prop28 : Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'équation différentielle $Y'=AY$ a ses solutions maximales définies sur $\mathbb{R}$ et si $Y(0)=Y_0\in\mathbb{R}^n$ alors la solution est $t\mapsto e^{tA}Y_0$.

ex29 : Le système $\begin{cases} x'(t)=x(t)+y(t)\\ y'(t)=y(t)+z(t)\\ z'(t)=2z(t)\end{cases}$ avec $\begin{matrix} x(0)=1\\ y(0)=1\\ z(0)=0\end{matrix}$

peut s'écrire $Y'=AY$ avec $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}$

Par réduction de A, on trouve que :
$$Y=\begin{pmatrix}e^t&0&0\\0&e^t&0\\0&0&e^{2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&t&t^2/2\\0&1&t\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^t+te^t\\e^t\\0\end{pmatrix}.$$

III. Espaces de Hilbert et séries de Fourier.

1. Espaces de Hilbert. [Li] 27

déf30 : Un espace préhilbertien H est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire.
Si de plus H est complet pour la norme associée à son produit scalaire, on dit que H est un espace de Hilbert. 31

rem31 : En dimension finie, tout espace préhilbertien est un Hilbert.

th32 : (de projection)
Soit $(H,(\cdot|\cdot))$ un espace de Hilbert. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de H alors $\forall x\in H$, $\exists!\, y\in F$, $\|x-y\|=\inf\limits_{z\in F}\|x-z\|$. On appelle y la projection de x sur F, notée $p_F(x)$ et

$y = p_F(x)$ ssi $\forall z \in F$, $\mathrm{Re}(x-y|z-y) \leq 0$ et $y \in F$.

prop33 : $p_F : H \to F$ est linéaire et continue. De plus, $p_F(x)$ est l'unique point $y \in F$ tel que $y \in F$ et $x - y \in F^\perp$.

prop34 : On a $H = F \oplus F^\perp$. On dit alors que p_F est la projection orthogonale sur F.

2. Séries de Fourier.

On note $CM_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 2π-périodiques, continues par morceaux. On munit $CM_{2\pi}$ du produit scalaire $(f|g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(t)}g(t)\,dt$. Notons $\|\cdot\|_2 = \sqrt{(\cdot|\cdot)}$ la norme associée.

[G] 269. prop35 : Posons $\forall n \in \mathbb{Z}$, $e_n : x \mapsto e^{inx}$. La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille libre orthogonale de $CM_{2\pi}$.

prop36 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f \in CM_{2\pi}$. Le sous-espace vectoriel $\mathcal{P}_n = \mathrm{Vect}(e_k)_{k\in[\![-n,n]\!]}$ vérifie $\mathcal{P}_n \oplus \mathcal{P}_n^\perp = CM_{2\pi}$. De plus, la projection orthogonale p_n de $\mathcal{P}_n$ vérifie $p_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e_k$ où $c_k(f) = (e_k|f)$ et on a $\inf_{g\in\mathcal{P}_n} \|f-g\|_2^2 = \|f - p_n(f)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2dt - \sum_{k=-n}^{n}|c_k(f)|^2$.

th37 : (égalité de Parseval)
Soit $f \in CM_{2\pi}$. Alors, $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(f)|^2$ converge et $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2dt$.

273 ex38 : Avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique égale à $t \mapsto 1 - \frac{t^2}{\pi^2}$ sur $[-\pi, \pi]$, on obtient $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Gourdon, Analyse.
Pommellet, Cours d'analyse.
Rouvière, Le petit guide du calcul différentiel.
Li, Cours d'analyse fonctionnelle.