148 - Exemples de décompositions de matrices. Applications.

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Décompositions de Dunford et de Jordan.

1. Décompositions de Dunford.

[R] 603 **th1 :** (décomposition de Dunford additive)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de polynôme caractéristique
DVP1 χ_A scindé sur $\mathbb{K}$. Alors, il existe un unique couple $(D,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ tel que :

- D est diagonalisable et N est nilpotente.
- $DN = ND$ et $A = D + N$.

De plus, D et N sont des polynômes en A.

ex2 : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas une décomposition de Dunford mais $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + 0$ si.

751 **rem3 :** • Si $A = D + N$ est une décomposition de Dunford alors $e^A = e^D e^N = e^D \sum_{k=0}^{q-1} \frac{1}{k!} N^k$ (où q est l'indice de nilpotence de N).
C'est donc un outil pratique pour calculer l'exponentielle d'une matrice.
• La décomposition de Dunford de e^A est $e^A = e^D + e^D(e^N - I_n)$.

appli4 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que χ_A soit scindé sur
DVP1 $\mathbb{K}$. Alors, A est diagonalisable ssi e^A est diagonalisable.

680 **th5 :** (décomposition de Dunford multiplicative)
Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que χ_A soit scindé sur $\mathbb{K}$. Il existe un unique couple $(D,U) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ tel que :

- D est diagonalisable et inversible.
- U est unipotente (i.e. $U - I_n$ est nilpotente)
- $A = DU = UD$.

rem6 : La décomposition de Dunford multiplicative vient de la décomposition additive d'une matrice inversible.

2. Application à l'étude des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

th7 : Le système différentiel $\begin{cases} Y'(t) = AY(t) \\ Y(0) = Y_0 \in \mathbb{K}^n \end{cases}$ admet une unique solution $t \mapsto e^{tA} Y_0$. [G2] 380

ex8 : Considérons le système différentiel suivant : 383

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) \\ y'(t) = y(t) + z(t) \\ z'(t) = 2z(t) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{matrix} x(0) = 1 \\ y(0) = 1 \\ z(0) = 0 \end{matrix}$$

On peut écrire ce système $Y'(t) = AY(t)$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Grâce à la décomposition de Dunford additive de A, on trouve que :

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t + te^t \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Décomposition de Jordan

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. [R] 672

th9 : (cas nilpotent)
DVP2 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent. Alors, il existe une base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_r$ telle que chaque sous-espace $E_i = \mathrm{Vect}\, \mathcal{B}_i$ soit stable par u et la matrice de $u_{|E_i}$ dans la base $\mathcal{B}_i$ est

$$J_i = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{q_i}(\mathbb{K}) \quad \text{où } q_i = \dim E_i.$$

rem10 : Deux matrices nilpotentes sont semblables ssi elles ont même blocs de Jordan J_i. [BMP] 171 ex11 : Ces deux matrices sont nilpotentes d'indice 2 mais non semblables : $\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 1&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&1&0 \end{pmatrix}$

[R] th12 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)\setminus\{0\}$ tel que χ_u soit scindé sur $\mathbb{K}$ de la forme $\chi_u(X) = (-1)^n \prod_{k=1}^{p} (X-\lambda_k)^{\alpha_k}$ avec $\alpha_k \in \mathbb{N}^*$ et les $\lambda_k \in \mathbb{K}$ distincts deux à deux.
Alors, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_p \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & & & \\ \varepsilon_{k,2} & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \varepsilon_{k,\alpha_k} & \lambda_k \end{pmatrix}$$
où $\varepsilon_{k,i} \in \{0,1\}$.

[G] 202 appli13 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors, A et ${}^tA$ sont semblables.

♡ rem14 : La décomposition de Jordan donne directement la décomposition de Dunford.

II. Méthodes directes de résolution des systèmes linéaires.

On veut résoudre numériquement un système linéaire $Ax=b$ où $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $b \in \mathbb{K}^n$.

1. Décomposition LU.

[A] 113 th15 : DVP3 Soit $A=(a_{ij})_{i,j\in[\![1,n]\!]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que toutes les sous-matrices diagonales
$$\Delta_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} \quad \text{avec } k \in [\![1,n]\!]$$
soient inversibles. Alors, il existe une matrice triangulaire inférieure $L=(l_{ij})_{i,j\in[\![1,n]\!]}$ avec $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $l_{ii}=1$ et une matrice triangulaire supérieure U telles que $A=LU$.
De plus, cette décomposition est unique.

116 rem16 : Ainsi, résoudre $Ax=b$ revient à résoudre deux systèmes linéaires à matrices triangulaires : $Ux=y$ et $Ly=b$ avec les méthodes de descente et remontée.

mét17 : En pratique, on écrit $L=(E_{n-1}\cdots E_2E_1)^{-1}$ et $U=(E_{n-1}\cdots E_2E_1)A$ où pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, on pose $A^{(k)} = E_{k-1}\cdots E_2E_1A = (a_{ij}^{(k)})_{i,j\in[\![1,n]\!]}$ et
$$E_k = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & -l_{k+1,k} & 1 & \\ & & \vdots & & \ddots \\ & & -l_{n,k} & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \forall i \in [\![k+1,n]\!], \quad l_{i,k} = \frac{a_{i,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}}.$$

ex18 : $$\begin{pmatrix} 5&2&1\\ 5&-6&2\\ -4&2&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 1&1&0\\ -\frac{4}{5}&-\frac{9}{20}&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5&2&1\\ 0&-8&1\\ 0&0&\frac{9}{4} \end{pmatrix}$$
où $E_1 = \begin{pmatrix} 1&0&0\\ -1&1&0\\ 4/5&0&1 \end{pmatrix}$ et $E_2 = \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&9/20&1 \end{pmatrix}$.

♡ rem19 : La décomposition LU est également utile pour déterminer le déterminant de A :
$\det A = \det L \det U = \det U = u_{11}\cdots u_{nn}$ où $U=(u_{ij})_{i,j\in[\![1,n]\!]}$

2. Décomposition de Cholesky

th20 : DVP3 Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Alors, il existe une unique matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire inférieure de coefficients diagonaux strictement positifs telle que $A = B{}^tB$. 120

rem21 : Une matrice symétrique définie positive admet une décomposition LU. 114
La démonstration de la décomposition de Cholesky utilise la décomposition LU de A.

mét22 : En pratique, pour $A=(a_{ij})_{i,j\in[\![1,n]\!]}$ on construit $B=(b_{ij})_{i,j\in[\![1,n]\!]}$ telle que $\forall i,j \in [\![1,n]\!]$, 122
$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} b_{ik}b_{jk}. \text{ Comme } A \text{ est symétrique :}$$
$$b_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{i,k}^2} \quad \text{et pour } 1\leq i<j\leq n,\ b_{ij} = \frac{1}{b_{ii}}\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik}b_{jk}\right)$$

rem23 : On utilise aussi cette décomposition pour résoudre $Ax=b$. Il suffit de résoudre deux systèmes linéaires à matrices triangulaires : $By=b$ et ${}^tBx=y$.
Puis on utilise la méthode de descente et de remontée.
La décomposition de Cholesky remplace avantageusement la décomposition LU pour les matrices symétriques définies positives. En effet, on effectue deux fois moins d'opérations.

III. Décompositions polaire et en valeurs singulières.

1. Décomposition polaire.

[R] 718 prop24 : Les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle sont réelles.

th25 : (spectral)
Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Alors, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPAP$ soit diagonale.

prop26 : • $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ ssi toutes les valeurs propres de A sont positives.
• $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ ssi toutes les valeurs propres de A sont strictement positives.

726 th27 : (décomposition polaire)
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Il existe $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^+(\mathbb{R})$
DVP4 telles que $A = OS$.
Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$ cette décomposition est unique.

[G] 249 rem28 : On a une décomposition polaire pour $A \in M_n(\mathbb{C})$ de la forme $A = UH$ avec U unitaire et H hermitienne positive.

[IP] 130 appli29 : $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact maximal de $GL_n(\mathbb{R})$. $SO_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact maximal de $SL_n(\mathbb{R})$.

appli30 : L'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ est égale à la boule unité $B(0,1) = \{A \in M_n(\mathbb{R}),\ |||A|||_2 \leq 1\}$. [IP] 167

2. Décomposition en valeurs singulières.

prop31 : Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. Alors, A^*A est hermitienne positive. En particulier, les valeurs propres de A^*A sont réelles positives. [A] 42

déf32 : Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. On appelle valeurs singulières de A les racines carrées des valeurs propres non nulles de A^*A.

rem33 : Si A est hermitienne alors les valeurs singulières sont les modules de ses valeurs propres. ♡

th34 : Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ ayant r valeurs singularités : $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$. Alors, il existe $U \in M_m(\mathbb{K})$ et $V \in M_n(\mathbb{K})$ unitaires telles que

$$A = U \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} V^*$$

rem35 : La décomposition en valeurs singulières est une généralisation du théorème spectral à des matrices rectangulaires quelconques. ♡

Gourdon, Algèbre.
Gourdon, Analyse.
Beck, Malick, Peyré, Objectif agrégation.
Rombaldi, Mathématiques pour l'agrégation.
Allaire, Algèbre linéaire numérique.