253 - Utilisation de la notion de convexité en analyse.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel où $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Fonctions convexes et espaces convexes.

1. Ensembles convexes.

[G] déf 1 : Une partie C de E est dite convexe si
51 $\forall a,b\in C$, $\forall \lambda\in[0,1]$, $\lambda a+(1-\lambda)b\in C$.

ex 2 : Les (sous-)espaces vectoriels sont convexes.

rem 3 : Une partie convexe est connexe par arcs, donc connexe.

prop 4 : L'intersection de 2 convexes est convexe.

déf 5 : Soit $A\subset E$. On appelle enveloppe convexe de A, notée $\mathrm{Conv}(A)$, l'intersection de toutes les parties convexes contenant A.

rem 6 : $\mathrm{Conv}(A)$ est le plus petit convexe contenant A. De plus, c'est l'ensemble des combinaisons convexes d'éléments de A i.e. si $x\in\mathrm{Conv}(A)$ alors il existe $x_1,\dots,x_p\in A$ et $\lambda_1,\dots,\lambda_p\in\mathbb{R}^+$ vérifiant $\lambda_1+\dots+\lambda_p=1$ tels que $x=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i x_i$.

54 th 7 : (de Carathéodory)
Si $\dim E=n$ alors tout élément de $\mathrm{Conv}(A)$ est combinaison convexe de $n+1$ éléments de A.

app 8 : Si E est de dimension finie alors l'enveloppe convexe d'une partie compacte est compacte.

2. Fonctions convexes.

95 déf 9 :
- Une application $f: E\to\mathbb{R}$ est dite convexe si $\forall(a,b)\in E^2$, $\forall\lambda\in[0,1]$, $f(\lambda a+(1-\lambda)b)\leq\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)$.
- f est strictement convexe si $\forall(a,b)\in E^2$ distincts, $\forall\lambda\in]0,1[$, $f(\lambda a+(1-\lambda)b)<\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)$
- f est dite concave si $-f$ est convexe.

♡ + [BMP] 27 + [R] 233 ex 10 :
- Toute norme de E est convexe.
- Une application affine est à la fois convexe et concave.

prop 11 : Une fonction convexe sur un intervalle I est continue sur $\mathring{I}$. [RDO] 135

ex 12 : Posons $f: x\mapsto\begin{cases}0 & \text{si } x\in]0,1[\\ 1 & \text{si } x=0 \text{ ou } x=1\end{cases}$
f est convexe sur $[0,1]$ mais pas continue sur $[0,1]$

th 13 : [G]
- Si f est dérivable alors f est convexe ssi f' est croissante.
- Si f est 2 fois dérivable sur I alors f est convexe sur I ssi $\forall x\in I$, $f''(x)\geq 0$.

ex 14 : ♡
- $\exp$ est convexe et $\ln$ est concave.
- Pour $p>1$, $x\mapsto x^p$ est convexe sur $\mathbb{R}^+$.

prop 15 : (inégalité de trois pentes) [G]
Si $f: I\to\mathbb{R}$ est convexe alors $\forall(a,b,c)\in I^3$ avec $a<b<c$, $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\leq\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}\leq\dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}$

th 16 : (de Bohr-Mollerup) ♡
DVP1
Toute fonction $f:\mathbb{R}^{+*}\to\mathbb{R}^{+*}$ vérifiant :
- $f(1)=1$
- $\forall x>0$, $f(x+1)=xf(x)$
- f est logarithmiquement convexe (i.e $\ln\circ f$ est convexe)

est égale à la fonction Γ, définie par $\forall x>0$, $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt$.

prop 17 : Toute fonction logarithmiquement convexe est convexe. ♡

II. Inégalités de convexité.

1. Inégalités classiques.

prop 18 : Soit $f: I\to\mathbb{R}$ dérivable. ♡
f est convexe ssi $\forall a,b\in I$, $f(b)\geq f(a)+(b-a)f'(a)$

ex 19 : ♡
- $\forall x\in\mathbb{R}$, $e^x\geq x+1$.
- $\forall x>-1$, $\ln(x+1)\leq x$.
- $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{2}{\pi}x\leq\sin x\leq x$.

[G] th20 : (inégalité arithmético-géométrique)
Soient $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}^+$. $(x_1\cdots x_n)^{1/n}\leq\frac{x_1+\dots+x_n}{n}$

[R] 239 th21 : (inégalité de Young)
Soient $p,q\in\mathbb{R}^{+*}$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.
Alors, $\forall x,y\in\mathbb{R}^{+*}$, $x^{\frac{1}{p}}y^{\frac{1}{q}}\leq\frac{x}{p}+\frac{y}{q}$.

2. Inégalités dans les espaces de Lebesgue

Soit $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré.

[GK] 210 th22 : (inégalité de Hölder)
Soient $p,q\in]1,+\infty[$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.
Soient $f\in L^p(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ et $g\in L^q(\Omega,\mathcal{A},\mu)$.
Alors, $fg\in L^1(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ et
$$\left|\int_\Omega f(t)g(t)d\mu(t)\right|\leq\left(\int_\Omega|f(t)|^pd\mu(t)\right)^{1/p}\left(\int_\Omega|g(t)|^qd\mu(t)\right)^{1/q}$$

♡ app23 : La fonction Γ est logarithmiquement convexe sur $\mathbb{R}^{+*}$ et donc convexe.

[GK] rem24 : Pour $p=q=2$, on obtient l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

th25 : (inégalité de Minkowski)
Soit $p\in[1,+\infty]$. Soient $f,g\in L^p(\Omega,\mathcal{A},\mu)$.
Alors, $f+g\in L^p(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ et $\|f+g\|_p\leq\|f\|_p+\|g\|_p$.

♡ app 26 : $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $L^p(\Omega,\mathcal{A},\mu)$.

3. Inégalités en probabilité

[GK] 169 th27 : (inégalité de Jensen)
Soit X une variable aléatoire intégrable à valeurs dans l'intervalle ouvert I.
Soit $f : I\to\mathbb{R}$ une fonction convexe.
Alors, $f(\mathbb{E}[X])\leq\mathbb{E}[f(X)]$.
(ceci reste vrai si $\mathbb{E}[f(X)]=+\infty$.)

th28 : (inégalité de Hoeffding) 380
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et centrées telles que $\forall n\in\mathbb{N},\exists c_n>0,\ |X_n|\leq c_n$ p.s. Alors, $\forall n\in\mathbb{N},\forall\varepsilon>0$,
$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^n X_i\right|>\varepsilon\right)\leq 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sum_{i=1}^n c_i}\right).$$

III. Applications à l'optimisation

1. Fonctions convexes et recherche d'extrema.

On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique $\langle\cdot|\cdot\rangle$. [BMP] 29

th29 : Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$.
Soit $f : U\to\mathbb{R}$ différentiable. Alors, les propositions suivantes sont équivalentes :
- f est convexe.
- $\forall x,y\in U,\ f(y)\geq f(x)+\langle\nabla f(x)|y-x\rangle$.
- $\forall x,y\in U,\ \langle\nabla f(x)-\nabla f(y),x-y\rangle\geq 0$.
- Si de plus f est deux fois différentiable sur U alors $\forall x,h\in U,\ \langle Hess_f(x)h|h\rangle\geq 0$.

app30 : Soit $A\in S_n(\mathbb{R})$. La fonction $x\mapsto\langle Ax|x\rangle$ est convexe ssi A est positive.

prop31 : Tout minimum local d'une fonction convexe est un minimum global. ♡

prop32 : Soit C un convexe non vide de $\mathbb{R}^n$. ♡
Soit $f : C\to\mathbb{R}$ une application strictement convexe. Alors, il existe au plus un minimum de f sur C.

2. Convexité dans les espaces de Hilbert.

On se donne $(H,\langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert et on note $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$. [Li] 32

th33 : (de projection sur un convexe fermé).
Soit C un convexe, fermé, non vide de H.
DVP2 Alors, pour tout $x \in H$, il existe un unique $y \in C$ tel que $\|x-y\| = \inf_{z \in C} \|x-z\|$.
On dit que $y = p_C(x)$ est la projection de x sur C. On a la caractérisation :
$y = p_C(x)$ ssi $y \in C$ et $\forall z \in C, \mathrm{Re}\langle x-y | z-y \rangle \geq 0$.

retirer

th34 : Si F est un sous-espace vectoriel fermé de H, alors $p_F : H \to F$ est une application linéaire et continue.
Pour $x \in H$, $p_F(x)$ est l'unique point $y \in F$ tel que $x - y \in F^\perp$.
De plus, $H = F \oplus F^\perp$.

cor35 : Pour tout sous-espace vectoriel F de H, $F^{\perp\perp} = \overline{F}$.

cor36 : Soit F un sous-espace vectoriel de H. Alors, F est dense dans H ssi $F^\perp = \{0\}$.

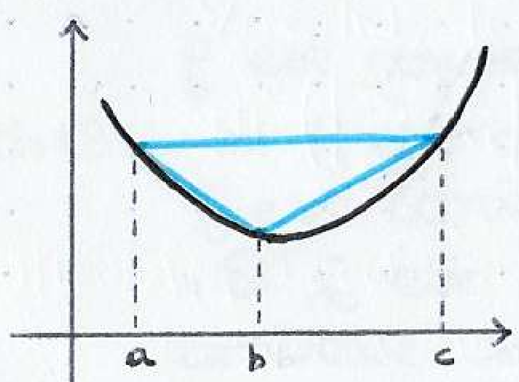
38 **th37** : (de représentation de Riesz)
Pour toute forme linéaire et continue $\varphi \in H'$, il existe un unique $y \in H$ tel que pour tout $x \in H$, $\varphi(x) = \langle x | y \rangle$.

[IP] **prop38** : (optimisation dans un espace de Hilbert)
Soit $J : H \to \mathbb{R}$ une fonction continue, convexe et coercive. Alors, il existe $a \in H$ tel que $J(a) = \inf_{x \in H} J(x)$.

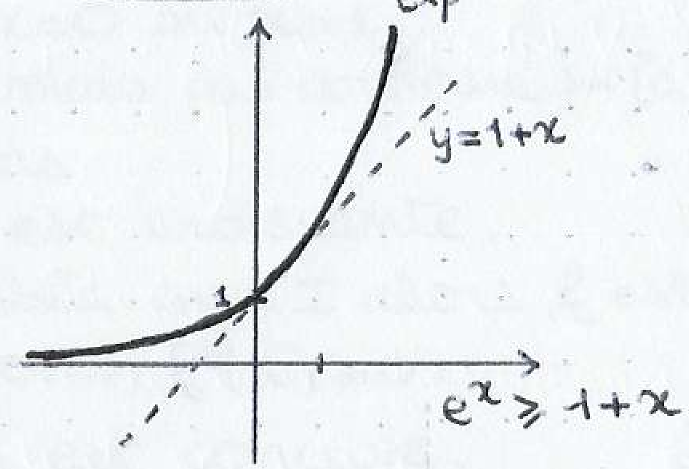
+ ajouter déf coercive

Annexes :

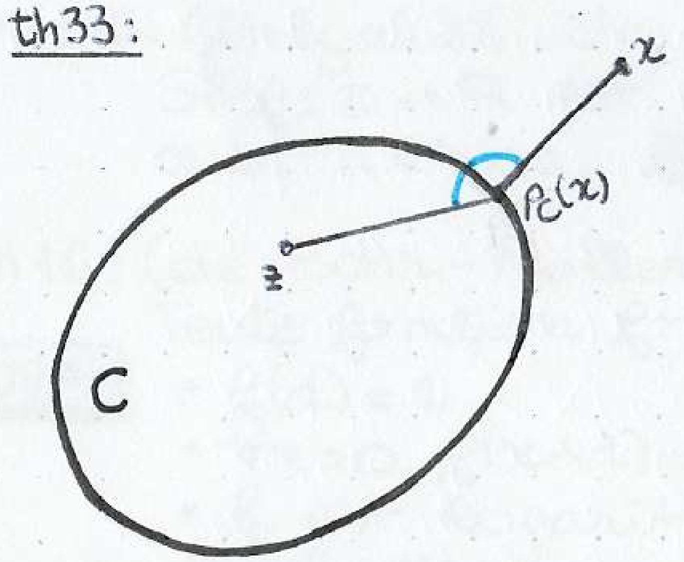
prop15 :

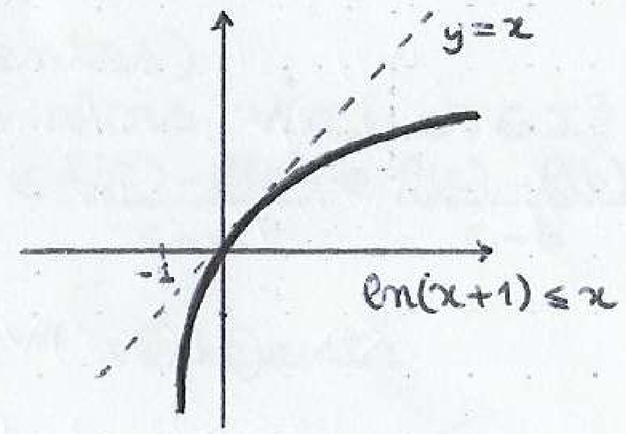


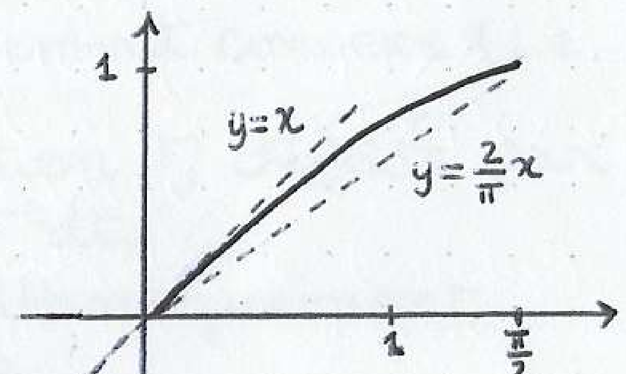
ex 19 :



th33 :







- Rombaldi, Éléments d'analyse réelle
- Gourdon, Analyse.
- Pommellet, Cours d'analyse.
- Ramis, Deschamps, Odoux, Cours de mathématiques spéciales, Topologie.
- Garet, Kurtzmann, De l'intégration aux probabilités.
- Beck, Malick, Peyré, Objectif agrégation.
- Li, Cours d'analyse fonctionnelle.