229 - Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

I. Fonctions monotones.

1. Définitions et premières propriétés.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

[RDO] 118

déf 1 : • On dit que f est croissante (resp. strictement croissante) sur I si $\forall (x,y) \in I^2$, $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ (resp. $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$).
• On dit que f est décroissante (resp. strictement décroissante) si $-f$ est croissante (resp. strictement croissante).
• On dit que f est (strictement) monotone si f est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante.

♡ ex 2 : • $x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{-*}$ et sur $\mathbb{R}^{+*}$, mais pas sur $\mathbb{R}$.
• $x \mapsto x^2$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

rem 3 : La croissance est conservée par somme, par multiplication par un scalaire positif, par produit si les fonctions considérées sont positives et par composition.
La composée d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante est décroissante.
L'inverse d'une fonction croissante (et ne s'annulant pas) est décroissante.

prop 4 : Une fonction f monotone est injective ssi elle est strictement monotone. Elle induit alors une bijection de I dans $f(I)$ dont la réciproque est strictement monotone (de même monotonie que f).

ex 5 : $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \ln(x)$ sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^{+*}$ respectivement.

2. Régularité des fonctions monotones.

th 6 : (de la limite monotone)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ monotone. Soit $x \in \mathring{I}$. Alors, f admet une limite à droite et à gauche en x.
Si f est croissante alors $f(x^-) \leq f(x) \leq f(x^+)$.

prop 7 : L'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone est au plus dénombrable.

th 8 : Une fonction f monotone est continue sur I ssi $f(I)$ est un intervalle.

cor 9 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et strictement monotone. Alors, $J = f(I)$ est un intervalle et f induit un homéomorphisme de I sur J.

th 10 : Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit f un homéomorphisme de I sur J. Alors, f est strictement monotone.

ex 11 : La fonction sinus est un homéomorphisme de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1,1]$ strictement croissante de réciproque arcsin. ♡

prop 12 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et dérivable à droite sur $\mathring{I}$. Alors,
• f est constante ssi $\forall t \in \mathring{I}$, $f'_d(t) = 0$.
• f est croissante ssi $\forall t \in \mathring{I}$, $f'_d(t) \geq 0$.
• f est décroissante ssi $\forall t \in \mathring{I}$, $f'_d(t) \leq 0$.
• f est strictement croissante (resp. décroissante) ssi $\{t \in \mathring{I}, f'_d(t) = 0\}$ ait son intérieur vide et $\forall t \in \mathring{I}$, $f'_d(t) \geq 0$ (resp. $f'_d(t) \leq 0$).

ex 13 : $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car $\{x \in \mathbb{R}, f'(x) = 0\} = \{0\}$.

3. Suites et séries de fonctions.

prop 14 : Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions monotones qui converge simplement vers f. Alors, f est monotone. ♡

th 15 : (de Dini) [G] 238
• Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions continues sur $[a,b]$ qui converge simplement vers f continue. Alors, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$.

- Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions croissantes continues sur $[a,b]$ qui converge simplement vers f continue sur $[a,b]$. Alors, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$.

212 th16 : (comparaison série-intégrale).
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et décroissante. Alors, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n = \sum_{k=0}^{n} f(k) - \int_0^n f(t)dt$ est convergente. Et $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)$ et $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ ont même nature.

app17 : $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$.

II. Fonctions convexes.

1. Définitions et premières propriétés.

Soit C un ensemble convexe dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$.

[R] 225 déf18 : • On dit que $f : C \to \mathbb{R}$ est convexe (resp. strictement convexe) si $\forall (x,y)\in C^2$, $\forall \lambda\in[0,1]$, $f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$
(resp. $f((1-\lambda)x+\lambda y) < (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$).
• On dit que f est (strictement) concave si $-f$ est (strictement) convexe.

♡ ex19 : • Toute norme de E est convexe.
• Une application affine est à la fois convexe et concave.

[RDO] 134 th20 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :
- f est convexe sur I.
- $\forall (a,b,c)\in I^3$ avec $a<b<c$, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$ (inégalité des 3 pentes).
- $\forall a\in I$, $t \mapsto \frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ est croissante sur $I\setminus\{a\}$.
- $\{(x,y)\in I\times\mathbb{R},\ f(x)\leq y\}$ (appelé épigraphe de f) est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

[R] 227 rem21 : Une combinaison linéaire à coefficients positifs de fonctions convexes est convexe.
Le produit de fonctions convexes n'est pas nécessairement convexe (ex : $x\mapsto x^3 = x^2 \cdot x$).

prop22 : Soit $g : I\to J$ convexe. Soit $f : J \to \mathbb{R}$ convexe et croissante. Alors, $f\circ g$ est convexe.

ex23 : $x\mapsto -x^2$ est concave alors que $x\mapsto -x$ et $x\mapsto x^2$ sont convexes.

prop24 : Soit $f : I\to\mathbb{R}$. convexe. Soit $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille de I. Soit $(\alpha_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille de $\mathbb{R}^+$ telle que $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 1$. Alors, $f\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i)$. [RDO] 135

2. Régularité des fonctions convexes.

th25 : Soit $f : I\to\mathbb{R}$ convexe. Alors, f admet une dérivée à droite et à gauche en tout point $a\in\mathring{I}$ et $f_g'(a) \leq f_d'(a)$. En particulier, f est continue sur $\mathring{I}$. Si $(a,b)\in\mathring{I}^2$ avec $a<b$, alors $f_d'(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f_g'(b)$.

rem26 : f_g' et f_d' sont croissantes sur $\mathring{I}$.

ex27 : Posons $f : x\mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x\in]0,1[\\ 1 & \text{si } x=0 \text{ ou } 1 \end{cases}$. f est convexe sur $[0,1]$ mais non continue en 0 et en 1.

th28 : • Si f est dérivable alors f est convexe ssi f' est croissante.
• Si f est 2 fois dérivable alors f est convexe ssi $\forall x\in I$, $f''(x)\geq 0$.

exp29 : • exp est convexe et ln est concave. ♡
• Pour $p>1$, $x\mapsto x^p$ est convexe sur $\mathbb{R}^+$.

III. Applications

1. Inégalités de convexité

prop30 : Soit $f : I\to\mathbb{R}$ dérivable. Alors, f est convexe ssi $\forall a,b\in I$, $f(b)\geq f(a) + (b-a)f'(a)$. ♡

ex31 : • $\forall x\in\mathbb{R}$, $e^x \geq x+1$.
• $\forall x > -1$, $\ln(x+1)\leq x$. ♡
• $\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}]$, $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$.

[G] 97 th32 : (inégalité arithmético-géométrique)
Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$. $(x_1 \cdots x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$

[R] 239 th33 : (inégalité de Young)
Soient $p, q \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Alors, $\forall x, y \in \mathbb{R}^{+*}$, $x^{1/p} y^{1/q} \leq \frac{x}{p} + \frac{y}{q}$.

[GK] 219 th34 : (inégalité de Hölder)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soient $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soient $f \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ et $g \in L^q(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.
Alors, $fg \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ et
$\left|\int_\Omega f(t) g(t) d\mu(t)\right| \leq \left(\int_\Omega |f(t)|^p d\mu(t)\right)^{1/p} \left(\int_\Omega |g(t)|^q d\mu(t)\right)^{1/q}$

♡ appli35 : (théorème de Bohr-Mollerup)
DVP1 Toute fonction $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*}$ vérifiant :
- $f(1) = 1$
- $\forall x > 0$, $f(x+1) = x f(x)$
- f est logarithmiquement convexe (i.e $\ln \circ f$ est convexe)

est égale à la fonction Γ, définie par $\forall x > 0$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

♡ rem36 : Toute fonction logarithmiquement convexe est convexe.

th37 : (inégalité de Minkowski)
Soit $p \in [1, +\infty]$. Soient $f, g \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Alors, $f + g \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ et $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

♡ appli38 : $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

2. Inégalités en probabilité

[GK] 169 th39 : (inégalité de Jensen)
Soit X une variable aléatoire intégrable à valeurs dans l'intervalle ouvert I. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe. Alors, $f(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[f(X)]$.

th40 : (inégalité de Hoeffding) 380
Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et centrées telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists c_n > 0$, $|X_n| \leq c_n$ ps. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall \varepsilon > 0$,
$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^n X_i\right| > \varepsilon\right) \leq 2 \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2 \sum_{i=1}^n c_i^2}\right)$$

3. Optimisation

On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique $\langle \cdot | \cdot \rangle$. [BMP] 29
th41 : Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable. Alors, les propositions suivantes sont équivalentes :
- f est convexe.
- $\forall x, y \in U$, $f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x) | y - x \rangle$.
- $\forall x, y \in U$, $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y) | x - y \rangle \geq 0$.
- Si de plus, f est 2 fois différentiable sur U alors $\forall x, h \in U$, $\langle \mathrm{Hess}_f(x) h | h \rangle \geq 0$.

appli42 : Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. $x \mapsto \langle Ax | x \rangle$ est convexe ssi A est positive.

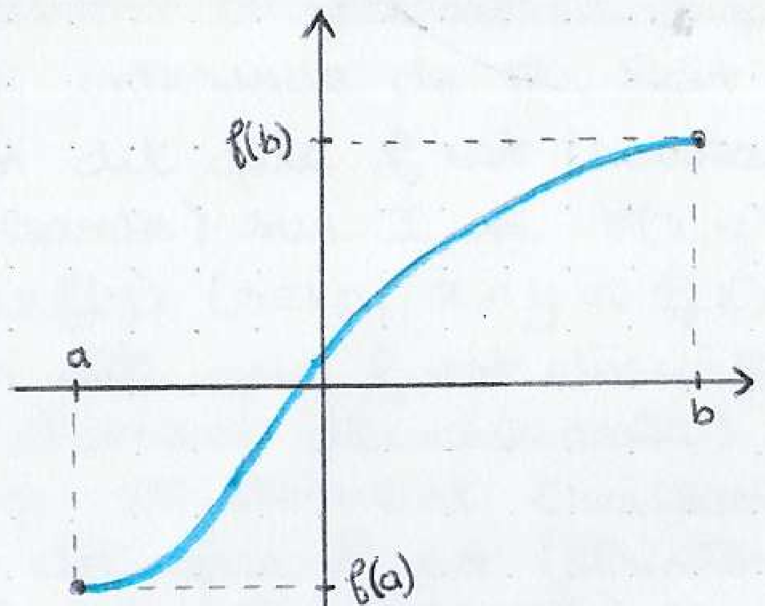
prop43 : Tout minimum local d'une fonction convexe est un minimum global. ♡

prop44 : Soit C un convexe non vide de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : C \to \mathbb{R}$ strictement convexe. Alors, il existe au plus un minimum de f sur C. ♡

lem45 : Soient $A, B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ distinctes. Soient $a, b \in]0, 1[$ [FGN3] 222
DVP2 tels que $a + b = 1$. Alors,
$\det(aA + bB) > (\det A)^a (\det B)^b$.

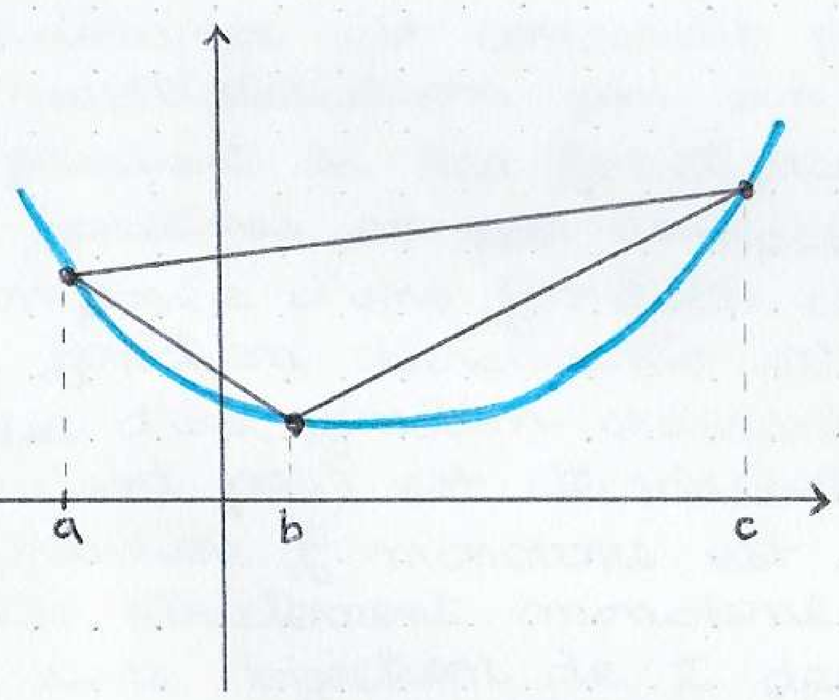
th46 : (ellipsoïde de John-Loewner)
DVP2 Soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$. Alors, il existe un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K. 229

th8 :

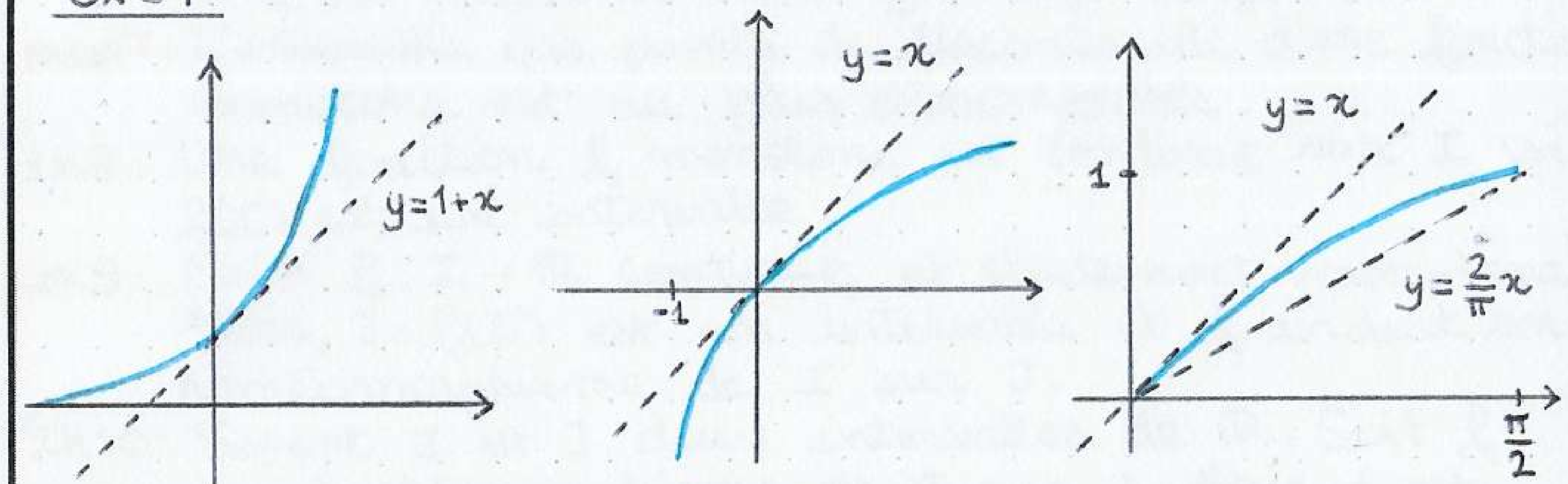


$f([a,b]) = [f(a), f(b)]$

inégalité des trois pentes : (th20)



ex 31 :



$e^x \geq 1+x$ $\qquad$ $\ln(x+1) \leq x$ $\qquad$ $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$

Ramis, Deschamps, Odoux, Topologie et éléments d'analyse

Gourdon, Analyse

Rombaldi, Eléments d'analyse réelle

Garet, Kurtzmann, De l'intégration aux probabilités

Francinou, Gianella, Nicolas, Oraux X-ENS, Algèbre 3