228 - Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

I. Généralités

1. Continuité

[DL] **déf 1 :** On dit que f est continue en $a \in I$ si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ i.e. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.
On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I.

♡ **ex 2 :** Les fonctions constantes et les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$.

[DL] **th3 :** (caractérisation séquentielle de la continuité) f est continue en $a \in I$ ssi pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ qui converge vers a, $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(a)$

[H] 134 **ex 4 :**
- La fonction de Dirichlet $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.
- $x \mapsto x \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$ n'est continue qu'en 0.

[P] 82 **prop5 :** L'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone est dénombrable.

[G] 12 **th6 :** f est continue sur $\mathbb{R}$ ssi l'image réciproque par f de tout intervalle de $\mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

14 **prop7 :** Soient f et g des fonctions continues en a.
- Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f + g$ et fg sont continues en a.
- ♡ Si $g(a) \neq 0$ alors f/g est continue en a.

prop8 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue en $a \in I$. Soit J un intervalle contenant $f(I)$. Soit $g : J \to \mathbb{R}$ continue en $f(a) \in J$. Alors $g \circ f$ est continue en a.

rem9 : Si f n'est pas définie en a et $\lim_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ alors on peut définir une fonction prenant la valeur ℓ en a et valant f sur $I - \{a\}$. Cette fonction est continue sur I et on l'appelle prolongement par continuité de f en a.

2. Dérivabilité

déf10 : Soit $a \in I$. On dit que f est dérivable en a si $\frac{f(t) - f(a)}{t - a}$ admet une limite lorsque $t \to a$ ($t \in I \setminus \{a\}$). On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I. 71
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I si elle est dérivable de dérivée continue sur I.

rem11 : Par récurrence, on peut définir la dérivée n-ième de f (si elle existe). On dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si $f^{(n)}$ existe et est continue sur I. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I alors on dira que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

ex 12 : Annexe 1 : Tableau des dérivées usuelles.

prop13 : Si f est dérivable en a alors f est continue en a. ♡

ex 14 : La réciproque est fausse.
$x \mapsto \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais seulement dérivable sur $\mathbb{R}^*$ [H] 156

ex 15 : La fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d(4^n x, \mathbb{Z})}{4^n}$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est dérivable en aucun point.

prop16 : Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ dérivables en $a \in I$. [G]
- pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a et $(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$.
- fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a) g(a) + f(a) g'(a)$.
- si $g(a) \neq 0$ alors f/g est dérivable en a et $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) g(a) - f(a) g'(a)}{g^2(a)}$.

prop17 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable en a. Soit J un intervalle contenant $f(I)$. Si $g : J \to \mathbb{R}$ est dérivable en $f(a) \in J$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = g' \circ f(a) \cdot f'(a)$.

prop18 : (formule de Leibniz)
Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ telles que pour $a \in I$, $f^{(n)}(a)$ et

$g^{(n)}(a)$ existent alors fg est n fois dérivable en a et $(fg)^{(n)}(a)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(a)\,g^{(n-k)}(a)$.

II. Théorèmes fondamentaux.

1. Théorème des valeurs intermédiaires (TVi)

[G] 41 **th19 :** TVi Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et si $f: I\to\mathbb{R}$ est continue, alors $f(I)$ est un intervalle.

♡ **cor20 :** Si $f\in\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ telle que $f(a)<0$ et $f(b)>0$ alors il existe $c\in]a,b[$ tel que $f(c)=0$.

[H] 137 **ex21 :** $x\mapsto\begin{cases}\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$ n'est pas continue en 0 mais vérifie le TVi.

[FGN] 228 **app22 :** Soit I un segment de $\mathbb{R}$. Si $f(I)\subset I$ ou si $I\subset f(I)$ alors f admet un point fixe dans I.

232 **app23 :** récip. TVi Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que pour tout segment I de $\mathbb{R}$, $f(I)$ est un segment et $\forall x\in\mathbb{R}$, $f^{-1}(\{x\})$ est fermé. Alors, f est continue.

[P] 83 **prop24 :**
- Soit $f: I\to\mathbb{R}$ croissante. Alors f est continue ssi l'image de f est un intervalle.
- Si f est une bijection continue alors f^{-1} est continue.

2. Théorème de Heine et compacts.

[H] 144 **déf25 :** On dit que f est uniformément continue sur I ssi $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall x,y\in I, |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

th26 : (de Heine)
Toute fonction continue sur un compact de $\mathbb{R}$ est uniformément continue.

rem27 : uniformément continue $\Rightarrow$ continue.

ex28 : $x\mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

[DL] **th29 :** Une fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes.

ex30 : $x\mapsto\frac{1}{x}$ est continue sur $]0,1]$ mais n'atteint pas sa borne en 0 et est non bornée.

th31 : (de Weierstrass)
DVP1 Toute fonction $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de ~~polynômes~~ fonctions polynomiales. [G] 304

3. Théorème de Rolle et théorème des accroissements finis.

prop32 : Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ dérivable en $c\in]a,b[$. Si f admet un extremum relatif en c alors $f'(c)=0$. [G] 73

ex33 : La réciproque est fausse : $x\mapsto x^3$ admet une dérivée nulle en l'origine mais ce n'est pas un extremum local. [DL]

th34 : (de Rolle) [G]
Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a)=f(b)$. Alors il existe $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.

ex35 : Faux si f n'est pas dérivable sur $]a,b[$, par exemple $x\mapsto|x|$ sur $[-1,1]$. ♡

th36 : (des accroissements finis) [G]
Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

ex37 : Les théorèmes 34 et 36 ne sont pas valables dans $\mathbb{C}$. En effet, $f:\begin{array}{l}[0,2\pi]\to\mathbb{C}\\ t\mapsto e^{it}\end{array}$ on a $f(0)=f(2\pi)$ mais f' ne s'annule pas.

app38 : Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]a,b[$. f est croissante sur $[a,b]$ ssi $\forall x\in]a,b[, f'(x)\geq 0$.

app39 : (théorème de Darboux) 80
Soit $f: I\to\mathbb{R}$ dérivable. Alors $f'(I)$ est un intervalle.

cor40 : Soient $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ continues, dérivables sur $]a,b[$. Alors, il existe $c\in]a,b[$ tel que $(f(a)-f(b))g'(c)=(g(a)-g(b))f'(c)$. 74

app41 : (règle de l'Hospital)
Soit $a\in\mathbb{R}$. Si f et g sont dérivables au

voisinage de a et si $f(a)=g(a)=0$. Supposons que $\ell = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe alors $\ell = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$.

app42: (formule de Taylor-Lagrange)
Soit $f\in \mathcal{C}^n([a,b])$ telle que $f^{(n+1)}$ existe sur $]a,b[$. Alors il existe $c\in]a,b[$ tel que
$$f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

ex43: Soit $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(0)=0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$. Alors, il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ telle que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $f^{(n)}(x_n)=0$.

prop44: (inégalité des accroissements finis).
Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]a,b[$. S'il existe $M>0$ tel que $\forall t\in]a,b[$, $|f'(t)|\leq M$. Alors $|f(b)-f(a)|\leq M|b-a|$.

[QZ] 271 app45: L'ensemble A des fonctions continues sur $[0,1]$ qui ne sont dérivables en aucun point de $[0,1]$ est dense dans $\mathcal{C}^0([0,1])$. **DVP2**

[P] 90 th46: Soit $f: I\to\mathbb{R}$ continue. Soit $a\in I$. Si f est dérivable sur $I\setminus\{a\}$ et si $\lim_{x\to a} f'(x)=\ell\in\mathbb{R}$ alors f est dérivable en a de dérivée ℓ.

ex47: $x\mapsto\begin{cases}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et toutes les dérivées sont nulles en 0.

III. Continuité et dérivabilité de certaines fonctions

1. Suites de fonctions

[G] 233 th48: Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge uniformément vers f. Si $\forall n\in\mathbb{N}$, f_n est continue en $a\in I$ alors f est continue en a.

th49: Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1([a,b])$. S'il existe $c\in[a,b]$ tel que $(f_n(c))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et si $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers g alors (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers f de classe $\mathcal{C}^1$ et $f'=g$.

ex50: Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $f_n: x\mapsto \frac{x}{1+n^2x^2}$. [H] 241
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ ayant pour limite uniforme la fonction $f\equiv 0$ mais $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $\mathbb{1}_{\{0\}}\not\equiv 0$.

2. Intégrales à paramètres

th51: (continuité sous signe intégral) [G] 161
Soient I, J des intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f: I\times J\to\mathbb{R}$.
Si :
- $\forall x\in J$, $t\mapsto f(t,x)$ est mesurable sur I.
- Pour pp $t\in I$, $x\mapsto f(t,x)$ est continue sur J.
- il existe $g\in L^1(I)$ tel que $\forall x\in J$, pp $t\in I$, $|f(t,x)|\leq g(t)$.

Alors, $F: x\mapsto\int_I f(t,x)dt$ est continue sur J.

th52: (dérivabilité sous signe intégral)
Si :
- $\forall x\in J$, $t\mapsto f(t,x)\in L^1(I)$.
- Pour pp $t\in I$, $x\mapsto f(t,x)$ est dérivable sur J.
- il existe $g\in L^1(I)$ tel que $\forall x\in J$, pp $t\in I$, $\left|\frac{\partial}{\partial x}f(t,x)\right|\leq g(t)$.

Alors, $F: x\mapsto\int_I f(t,x)dt$ est dérivable sur J et $\forall x\in J$, $F'(x)=\int_I \frac{\partial}{\partial x}f(t,x)dt$.

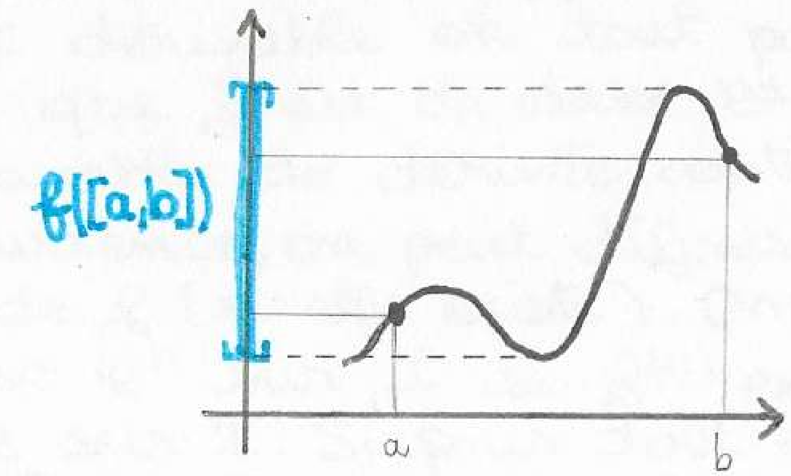
ex53: Pour $f: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{+*}\to\mathbb{R}$ [H] 225
$(x,t)\mapsto\begin{cases}\frac{t}{x^2}\exp\left(-\frac{t}{|x|}\right) & \text{si } t\neq 0\\ 0 & \text{si } t=0\end{cases}$
F est bien définie mais pas continue en 0.

[G] Gourdon, Analyse.
[H] Hauchecorne, Les contre-exemples en maths.
[QZ] Queffelec, Zuily, Analyse pour l'agrégation.
[P] Pommellet, Cours d'analyse.
[FGN] Francinou, Gianella, Nicolas, Oraux X-ENS, Analyse 1.
[DL] Dreveton, Lhabouz, Leçons pour l'agrég de maths.

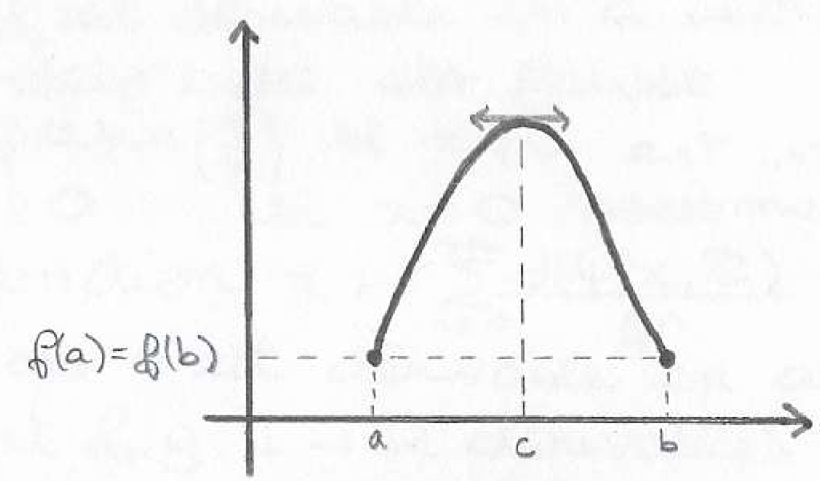
Annexe 1 : Tableau des dérivées usuelles

$f(x)$	dérivée $f'(x)$
$k \in \mathbb{R}$	0
$x^r \ (x>0)$	$r x^{r-1}$
$\ln(x) \ (x>0)$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$

Annexe 2 : Illustration du théorème des valeurs intermédiaires



Annexe 3 : Illustration du théorème de Rolle



Annexe 4 : Illustration du théorème des accroissements finis