213 - Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Généralités.

1. Espaces préhilbertiens.

[Li] 27 **déf 1:** On appelle espace préhilbertien un $\mathbb{K}$-espace vectoriel H muni d'un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ ie une application $H \times H \to \mathbb{K}$ vérifiant :
- $\forall y \in H$, $(\cdot|y)$ est linéaire.
- $\forall x, y \in H$, $(y|x) = \overline{(x|y)}$.
- $\forall x \in H$, $(x|x) \geq 0$.
- $(x|x) = 0 \iff x = 0$.

Et $x \mapsto \|x\| = \sqrt{(x,x)}$ est une norme sur H.

À partir d'ici, $(H, (\cdot|\cdot))$ est un espace préhilbertien.

29 **prop2:** $\forall x, y \in H$, $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2Re(x|y)$.

prop3: (inégalité de Cauchy-Schwarz)
$\forall x, y \in H$, $|(x|y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.
(égalité ssi x et y sont liés).

[DL] **prop4:** (inégalité de Minkowski)
$\forall x, y \in H$ $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$
(égalité ssi x et y sont positivement liés).

[Li] 32 **prop5:** (identité du parallélogramme).
$\forall x, y \in H$, $\frac{1}{2}\|x+y\|^2 + \frac{1}{2}\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

[BMP] 93 **rem 6:** La réciproque est vraie : si $\|\cdot\|$ vérifie cette identité alors $(H, (\cdot|\cdot))$ est un espace préhilbertien où $\forall x, y \in H$, $(x|y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$.

ex 7:
- Le produit scalaire usuel de $\mathbb{K}^n$ est $(x|y) = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}$.
- 92 $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace préhilbertien muni du produit scalaire $(f|g)_{L^2} = \int_\Omega f\bar{g}\,d\mu$.
- $\ell^2(\mathbb{N})$ est un espace préhilbertien muni du produit scalaire $(u|v)_{\ell^2} = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \overline{v_n}$.

2. Orthogonalité.

déf 8: On dit que deux vecteurs x et y de H sont orthogonaux si $(x|y) = 0$ et on note $x \perp y$. [Li] 30
Si A est une partie de H alors l'ensemble $A^\perp = \{x \in H ; \forall y \in A, (x|y) = 0\}$ s'appelle orthogonal de A.

rem 9: $A^\perp$ est la plus grande partie orthogonale à A et c'est un sous-espace vectoriel fermé de H.

prop10: Soient A, B deux parties de H.
- Si $A \subset B$ alors $B^\perp \subset A^\perp$.
- $A \cap A^\perp = \{0\}$.
- $(\overline{A})^\perp = A^\perp$.
- $A^\perp = (\overline{\mathrm{Vect}\,A})^\perp$.

3. Espaces de Hilbert.

déf 11: Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien H et complet pour la norme $\|\cdot\|$.

rem 12:
- C'est un cas particulier d'espace de Banach.
- Tout espace préhilbertien de dimension finie est un espace de Hilbert.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ alors on parle d'espace euclidien.
Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors on parle d'espace hermitien.

ex 13:
- $(L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu), (\cdot|\cdot)_{L^2})$ et $(\ell^2(\mathbb{N}), (\cdot|\cdot)_{\ell^2})$ sont des espaces de Hilbert.
- $(\mathcal{C}^0([0,1]), (\cdot|\cdot)_{L^2})$ n'est pas un espace de Hilbert, mais c'est un espace préhilbertien. [BMP] 98

II. Théorème de projection et conséquences. [Li] 32

Soit $(H, (\cdot|\cdot))$ un espace de Hilbert.

th14: (de projection)
DVP 1 Soit C une partie convexe, fermée, non vide de H. Alors, $\forall x \in H, \exists! y \in C, \|x-y\| = \inf_{z \in C} \|x-z\|$
On dit que $y = p_C(x)$ est la projection de x sur C. Et on a la caractérisation :
$y = p_C(x) \iff y \in C$ et $\forall z \in C, Re(x-y|z-y) \leq 0$.

prop15: L'application $p_C : H \to C$ est continue et 1-lipschitzienne.

th16: Si F est un sous-espace vectoriel fermé de H, alors $p_F : H \to F$ est une application linéaire et continue. Pour $x \in H$, $p_F(x)$ est l'unique point $y \in F$ tel que $x - y \in F^\perp$.
De plus, $H = F \oplus F^\perp$. On dit que p_F est la projection orthogonale sur F.

cor17: Pour tout sous-espace vectoriel F de H, $F^{\perp\perp} = \overline{F}$.

cor18: Soit F un sous-espace vectoriel de H.
Alors F est dense dans H ssi $F^\perp = \{0\}$.

app19: L'ensemble $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

th20: (de représentation de Riesz-Fréchet).
Pour toute forme linéaire et continue $\varphi \in H'$, il existe un unique $y \in H$ tel que pour tout $x \in H$, $\varphi(x) = (x|y)$.

app21: Pour tout $T \in \mathcal{L}_c(H)$, il existe un unique opérateur $T^* \in \mathcal{L}_c(H)$ tel que $\forall x, y \in H$, $(Tx|y) = (x|T^*y)$.
De plus, $\|T^*\| = \|T\|$. L'opérateur T^* s'appelle l'adjoint de T.

[IP] **th22:** (de Lax-Milgram).
DVP3 Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soit a une forme bilinéaire sur H, continue et coercive (ie $\exists \mu > 0, \forall u \in H, a(u,u) \geq \mu\|u\|^2$).
Alors, $\forall \varphi \in H', \exists ! u \in H, \forall v \in H$, $a(u,v) = \varphi(v)$.

III. Bases hilbertiennes.

Ici $(H, (\cdot|\cdot))$ est un espace préhilbertien.

[Li] 41 **déf23:** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de H. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormée si pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, $(u_n|u_m) = \delta_{n,m}$.

prop24: Toute famille orthonormée est libre.

prop25: (inégalité de Bessel).
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite orthonormée dans H.
On a $\forall x \in H$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} |(x|u_n)|^2 \leq \|x\|^2$.

prop26: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite orthonormée dans H. 43
Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de H engendré par $u_0, \dots, u_n$.
Alors, pour tout $x \in H$, $p_F(x) = \sum_{i=0}^{n} (x|u_i)u_i$.

th27: (procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt). ♡
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite linéairement indépendante de vecteurs de H. Il existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ orthonormée de H telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Vect}(u_0, \dots, u_n) = \mathrm{Vect}(x_0, \dots, x_n)$.

déf28: On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H est une base hilbertienne si elle est orthonormée et totale (ie $\mathrm{Vect}(u_n, n\in\mathbb{N})$ est dense dans H).

déf29: Un espace topologique E est dit séparable s'il existe une partie D de E dénombrable et dense dans E. 40

prop30: Tout espace de Hilbert séparable possède des bases hilbertiennes. 45

th31: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H.
Alors, pour tout $x \in H$, $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x|u_n)u_n$.

th32: (Formules de Parseval).
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H.
Alors, $\forall x \in H$, $\|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |(x|u_n)|^2$.
et $\forall x, y \in H$, $(x|y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x|u_n)\overline{(y|u_n)}$.

th33: Tous les espaces de Hilbert séparables et de dimension infinie sont isomorphes entre eux et en particulier à $\ell^2(\mathbb{N})$.

IV. Applications.

1. Séries de Fourier.

[BMP] 123 On note $L^2_{2\pi}$ l'espace des fonctions 2π-périodiques de carré intégrable sur $[0, 2\pi]$.

prop34: Muni du produit scalaire $(f|g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$, $L^2_{2\pi}$ est un espace de Hilbert.

déf 35: On pose $\forall n\in\mathbb{Z}, \forall t\in\mathbb{R}, e_n(t)=e^{int}$. Si $f\in L^2_{2\pi}$, on note $c_n(f)=(f|e_n)$ le n-ième coefficient de Fourier de f.

prop 36: La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$.

rem 37: Si $f\in L^2_{2\pi}$ alors $f=\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e_n$ et l'égalité de Parseval devient $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(f)|^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2dt$.

[G] 273 ex 38: Avec $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique égale à $t\mapsto 1-\frac{t^2}{\pi^2}$ sur $[-\pi,\pi]$, on obtient $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

2. L'espace $L^2(I,\rho)$.

[BMP] 110 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

déf 39: On dit que $\rho:I\to\mathbb{R}$ est une fonction poids si elle est mesurable, strictement positive et telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\int_I|x|^n\rho(x)dx$ converge.

prop 40: On note $L^2(I,\rho)=\{f:I\to\mathbb{R}, \int_I|f(t)|^2\rho(t)dt<+\infty\}$. Muni de $(f|g)=\int_I f(t)\overline{g(t)}\rho(t)dt$, c'est un espace de Hilbert.

déf 41 prop: Il existe une unique famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires et orthogonaux deux à deux, tels que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\deg(P_n)=n$. On l'appelle famille des polynômes orthogonaux associés à ρ.

140 th 42: DVP 2 On suppose qu'il existe $\alpha>0$ tel que $\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)dx$ converge. Alors, les polynômes orthogonaux associés à ρ forment une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$.

110 ex 43: Si $I=\mathbb{R}$ et $\rho:x\mapsto e^{-x^2}$ alors la famille des polynômes orthogonaux est composée des polynômes de Hermite.

3. Espace de Sobolev.

[B] 120 On pose $I=]0,1[$.

déf 44: On définit l'espace de Sobolev par $H^1(I)=\{u\in L^1(I); \exists v\in L^1(I), \forall\varphi\in\mathcal{C}^1_c(I), \int_I u\varphi'=-\int_I v\varphi\}$.

Pour tout $u\in H^1(I)$, on note $u'=v$.

prop 45: $H^1(I)$ muni de $(u|v)_{H^1}=\int_I(u'v'+uv)$ est un espace de Hilbert. 121

prop 46: Soit $u\in H^1(I)$. Il existe un unique $\tilde{u}\in\mathcal{C}^0(\bar{I})$ tel que $u=\tilde{u}$ pp sur I et $\forall x,y\in\bar{I}$, $\tilde{u}(x)-\tilde{u}(y)=\int_y^x u'(t)dt$. (On identifiera presque toujours u à son représentant continu $\tilde{u}$.) 122

déf 47: On définit $H^1_0(I)=\{u\in H^1(I), \tilde{u}(0)=\tilde{u}(1)=0\}$. (C'est un sous-espace vectoriel fermé de $H^1(I)$ donc $(H^1_0(I),(\cdot|\cdot)_{H^1})$ est un espace de Hilbert.) 133

app 48: Soit $f\in L^2(I)$. Il existe une unique solution faible $u\in H^1_0(I)$ de la condition de Dirichlet: 136

$$(*)\begin{cases}-u''+u=f \text{ dans } I\\ u(0)=u(1)=0\end{cases}$$

(ie $\forall\varphi\in H^1_0(I)$, $\int_I(u'\varphi'+u\varphi)=\int_I f\varphi$.)

De plus, si $f\in\mathcal{C}^0(\bar{I})$ alors $u\in\mathcal{C}^2(\bar{I})$ est une solution classique de $(*)$.

- Li, Cours d'analyse fonctionnelle.
- Beck, Malick, Peyré, Objectif agrégation.
- Brezis, Analyse fonctionnelle.