

190 : Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

Combien existe-t-il de couplages possibles à l'oral de l'agrégation ? Combien existe-t-il de manières de pourvoir 400 postes parmi 1400 candidats ? Le dénombrement est l'art de compter des choses, et la combinatoire donne un ensemble d'outils et de méthodes qui le permettent. Dans cette leçon 190 : méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement que je vais vous présenter aujourd'hui, je vous propose d'explorer ces divers outils et quelques situations d'application. Mon plan est divisé en deux parties : dans la première, plus théorique, je donne un certain nombre d'outils classiques de la combinatoire, et dans la deuxième, je donne quelques situations dans divers domaines des mathématiques où il est question de dénombrer des objets.

La fin justifiant les moyens, je vais commencer par motiver cette leçon en abordant d'abord ma seconde partie. Le dénombrement est une discipline transversale des mathématiques, dans le sens où on peut rencontrer des problèmes de dénombrement au détour de sujets très variés. J'en donne ici trois. Le premier s'intéresse aux groupes finis, et leurs actions sur des ensembles finis. Notamment, les Proposition 30 et Théorème 32 (la relation orbite-stabilisateur) sont souvent la clé de nombreux raisonnements sur le cardinal d'un groupe ou d'un ensemble sur lequel un groupe opère. On peut notamment penser aux p -groupes dont le centre n'est pas trivial, et leurs actions sur des ensembles finis. Dans les groupes finis remarquables, on peut penser aux groupes multiplicatifs des corps finis et leurs sous-groupes. Dans le paragraphe qui suit, je m'intéresse plus particulièrement aux carrés dans les corps finis, ce qui me conduit à mon second développement, la loi de réciprocité quadratique, que je démontre à l'aide de la classification des formes quadratiques sur un corps fini. Fait intéressant, cette démonstration fait agir un p -groupe sur un ensemble, en rappel au paragraphe précédent. Enfin, qui dit ensemble fini dit tirage au hasard d'un élément dans cet ensemble, avec la célèbre formule "nombre de cas favorables sur nombre de cas total". Dans le paragraphe qui suit, je m'intéresse plus particulièrement à la loi uniforme sur les groupes de permutation, et ses propriétés. Notez que la formule de BURNSIDE, issue de la théorie des actions de groupes, trouve une utilité dans ce paragraphe – voyez l'Application 36.

Comme nous l'avons vu, la connaissance du nombre d'éléments d'un ensemble est riche de conséquences. C'est pourquoi ma première partie, plus théorique, donne un ensemble d'outils (combinatoires) pour permettre de dénombrer des ensembles. Dans un tout premier paragraphe, je donne un sens précis à ce que signifie "nombre d'éléments d'un ensemble", et par extension ce que signifie qu'un ensemble est fini. Une fois ce cadre proprement posé, je m'attaque aux différentes structures combinatoires usuelles.

Le principe additif correspond aux deux idées suivantes : si j'ai deux sacs de billes et que je verse l'un dans l'autre, alors le nombre de billes dans ce sac est la somme du nombre de billes lorsqu'elles étaient séparées en deux sacs. En termes mathématiques, on parle d'union disjointe. De même, pour compter le nombre de fruits sur l'étalage d'un primeur, on peut compter séparément le nombre de pommes, de bananes, etc., et faire la somme des résultats. En termes mathématiques, on parle de partition. Ces deux idées sont à la base d'un grand nombre de formules, souvent récurrentes, dont je donne quelques exemples dans l'Exemple 20.

Avec le principe additif, on ne prenait qu'un élément dans un ensemble, que se passe-t-il maintenant si on en prend plusieurs ? Il y a pour cela plusieurs possibilités : on peut les prendre successivement (sous-entendu que l'ordre compte), ou simultanément (c'est-à-dire l'ordre ne compte pas). On peut autoriser les répétitions ou non. Dans le cas où l'ordre compte, on parle de "principe multiplicatif" – nom venant de la Proposition 11. La distinction avec ou sans répétition conduit aux définitions de liste et d'arrangement. Au contraire, lorsque l'ordre ne compte pas, on en vient à parler de combinaisons, et l'outil "coefficient binomial" qui en découle. Notez que la formule de Proposition 18 qui donne l'expression explicite de $\binom{n}{k}$ découle de celle donnant les arrangements, en Proposition 15. En effet, Choisir un arrangement, c'est choisir son support et son ordre, et choisir un arrangement, c'est choisir le premier, puis le second distinct du premier, puis le troisième distinct des deux précédents etc.

Il est extrêmement fréquent de déterminer une formule implicite ou récurrente pour le cardinal d'un ensemble à partir d'une partition, et l'Exemple 20 en est une belle illustration. Très souvent, on exprime un cardinal comme une somme pondérée de coefficients binomiaux, comme par exemple le nombre de dérangements ou de surjections – voyez les deux premiers points de l'Exemple 20. La formule de PASCAL permet de renverser ces formules, et souvent donne une expression explicite du cardinal que l'on recherche. L'Application 24 en donne l'exemple avec le nombre de surjections.

Ces formules récurrentes peuvent aussi être exploitées pour déterminer des relations algébriques entre des séries formelles bien choisies, que l'on appelle séries génératrices d'une suite de nombres, et qui font l'objet du paragraphe suivant. On exploite pour cela l'unicité d'écriture des séries formelles (voire entières) pour en identifier les coefficients. C'est fort de cet outil que je propose mon premier développement, le dénombrement du nombre de partitions d'un ensemble fini, aussi appelé "nombres de BELL".