1

Leçon 154 : Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Soit $\mathbb{K}$ corps commutatif, E un $\mathbb{K}$ev de dimension finie n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$

I] Sous-espaces stables par un endomorphisme.

1] Définitions et premières propriétés

def 1 Soit F sev de E. F stable par u si $u(F) \subset F$.
[BEC 158]

ex 2 [BEC 158] Le noyau, l'image et les sous-espaces propres de u sont stables par u.

Lemme 3 [BEC 159] Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ tq $u \circ v = v \circ u$. Alors le noyau et l'image de v sont stables par u.

Lemme 4 [DEB 168] Soit F sev de E. Il y a équivalence entre :
1] F est un sous-espace stable par u
2] u a pour matrice dans tout base obtenue par complétion d'une base de F : $M(u) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$

Appli 5 [BEC 159] Le lemme entraine la propriété suivante :
χ_u irréductible $\Leftrightarrow$ u n'admet pas de sous espace stable non trivial.

Prop 6 [DEB 194] Le plus petit sous-espace vectoriel stable par u contenant un vecteur $x \neq 0$ est $F_x = \mathrm{Vect}(u^k(x) / k \in \mathbb{N})$.
De plus, $\dim F_x = \min(p \in \mathbb{N} / (x, u(x), \dots u^p(x))$ liée $)$.

Prop 7 [DEB 195] (Cayley-Hamilton) $\chi_u = \det(u - X\,id)$ est un polynôme annulateur de u et donc un multiple de son polynôme minimal.

Th 8 [BEC 163] (Lemme des noyaux) Soit $P = Q_1 \dots Q_m$ polynôme annulateur de u où les Q_i sont 2 à 2 premiers entre eux.
Alors $E = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Ker}(Q_i(u))$

Appli 9 [BEC 164] Soit F sev de E stable par u.
Alors $F = \bigoplus_{i=1}^{m} (F \cap \mathrm{Ker}(Q_i(u)))$.

def 10 [GOU 188] Soit $A \subset E$. On note $A^{\perp} = \{\varphi \in E^* / \forall x \in A, \varphi(x) = 0\}$

Prop 11 [BEC 159] Soit F sev de E. F stable par $u \Leftrightarrow F^{\perp}$ stable par ${}^t u$

2) Application à la réduction

def 12 [DEB 197 + GOU 175] u est diagonalisable s'il vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :
1] E somme directe des sous-espaces propres de u
2] $\dim E = \sum_{\lambda \in Sp(u)} \dim E_\lambda(u)$
3] Il existe une base de E formée des vecteurs propres de u
4] Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale
5] $\exists P \in \mathbb{K}[X]$ scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples tel que $P(u) = 0$

Prop 13 [GOU 164] Soit F sev de E stable par u.
Alors si u diagonalisable, $u_{|F}$ est diagonalisable aussi.

Prop 14 [GOU 166] Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $v \circ u = u \circ v$. (DEV 2)
Alors les sous-espaces propres de u sont stables par v.

Appli 15 [FGN 160] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ses valeurs propres 2 à 2 distinctes et $m_1, \dots, m_r$ leur multiplicités.
Soit $C(A) = \{M \in M_n(\mathbb{K}) / AM = MA\}$ le commutant de A.
Alors $\dim(C(A)) = m_1^2 + \dots + m_r^2$
De plus, en notant $\mathbb{K}[A] = \{P(A) / P \in \mathbb{K}[X]\}$, on a :
$\dim(C(A)) = n \Leftrightarrow \dim(\mathbb{K}[A]) = n \Leftrightarrow r = n \Leftrightarrow C(A) = \mathbb{K}[A]$.

Appli 15 bis [FGN 159] Résoudre l'équation matricielle $X^2 + X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

def 16 [DEB 203] u est trigonalisable s'il vérifie l'une des conditions suivantes :
1] Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire
2] u annule un polynôme scindé sur $\mathbb{K}$
3] χ_u est scindé.

Prop 17 [GOU 165] Soit F sev de E stable par u.
Alors si u est trigonalisable, $u_{|F}$ est trigonalisable aussi.

Th 18 [GOU 166] Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisables (resp. trigonalisables) tq $u \circ v = v \circ u$. Alors il existe une base commune de diagonalisation (resp. trigonalisation) de u et v.

Th 19 [BEC 167] Soit $(u_i)_{i \in I}$ famille d'endomorphismes telle que $\forall i, j \in I$ $u_i \circ u_j = u_j \circ u_i$. Si tous les u_i sont diago (resp trigo), alors il existe une base commune de E dans laquelle les matrices des u_i sont toutes diago (resp trigo)

II] Endomorphismes remarquables

1] Endomorphismes cycliques

déf 20 [BEC 174] u est cyclique si $\exists x \in E$ tq $(x, u(x), \dots, u^{m-1}(x))$ est une base de E.

déf 21 [BEC 175] Soit $P(X) = X^m + a_{m-1}X^{m-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{K}[X]$. La matrice compagnon associée à P est :

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -a_{m-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$$

De plus, $\chi_{C_P} = P$

Prop 22 [BEC 174] Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1] u est cyclique

2] $(-1)^m \chi_u = \pi_u$

3] π_u est de degré m

4] $\exists$ une base de E dans laquelle la matrice de u est une matrice compagnon

5] $\dim(\mathbb{K}[u]) = m$ (DÉV 1)

Prop 23 [COG 295] Soit u endomorphisme cyclique de E. Soit F sev stable par u de E. Alors $u_{|F}$ est lui-même un endomorphisme cyclique de F.

Prop 24 [COS 296] Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ cyclique. Notons $\mathbb{K}_u[X]$ l'ensemble des polynômes unitaires divisant π_u dans $\mathbb{K}[X]$, et S_u l'ensemble des sous-espaces de E stables par u.

Alors $\phi : \mathbb{K}_u[X] \longrightarrow S_u$, $Q \longmapsto \mathrm{Ker}(Q(u))$ est bijective. (DÉV 1)

Coro 25 [COS 297]

1] Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ cyclique. Il y a un nombre fini de sous-espaces de E stables par u.
Il y en a précisément autant que de diviseurs unitaires de π_u dans $\mathbb{K}[X]$.

2] Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ (cyclique) nilpotent d'indice m. Il y a exactement $(m+1)$ sous-espaces de E stables par u.
Ce sont les $\mathrm{Ker}(u^k)$, $k \in [\![0, m]\!]$. (DÉV 1)

Th 26 [GOU 290] Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe $F_1, \dots, F_r$ sev de E stables par u tels que :

1] $E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$

2] $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $u_{|F_i} = u_i$ est un endomorphisme de F_i cyclique

3] $\forall i \in [\![1, r-1]\!]$, $\pi_{u_{i+1}} \mid \pi_{u_i}$

La suite $\pi_{u_1}, \dots, \pi_{u_r}$ ne dépend que de u et est appelée la suite des invariants de similitudes de u.

Th 27 [GOU 291] Soit $(\pi_{u_i})_{i \in [\![1,r]\!]}$ la suite des invariants de similitude de u.
Alors $\exists B$ base de E tq $\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} C_{\pi_{u_1}} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & C_{\pi_{u_r}} \end{pmatrix}$.

De plus, $\pi_{u_1} = \pi_u$ et $\pi_{u_1} \times \dots \times \pi_{u_r} = (-1)^m \chi_u$.

Coro 28 [GOU 291]

1] $u, v \in \mathcal{L}(E)$ semblables $\Leftrightarrow$ ils ont les mêmes invariants de similitudes.

2] $u \in \mathcal{L}(E)$ cyclique $\Leftrightarrow$ u admet un unique invariant de similitude.

2] Endomorphismes semi-simples

déf 29 [BEC 160] u semi-simple si $\forall F$ sev de E stable par u, il existe un supplémentaire de F stable par u.

Th 30 u semi-simple $\Leftrightarrow$ $\pi_u = Q_1 \cdots Q_r$ est produit de polynômes irréductibles unitaires distincts 2 à 2.

Appli 31 un endomorphisme nilpotent non nul n'est jamais semi-simple

Appli 32 Soit u semi-simple. Soit F sev de E stable par u.
Alors $u_{|F}$ est aussi semi-simple.

Coro 33 [BEC 324] u diagonalisable $\Rightarrow$ u semi-simple.

Rque 34 Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, la réciproque est vraie.

3] Endomorphismes normaux

Dans cette partie, on considère E hermitien, $u \in \mathcal{L}(E)$ et on note u^* son adjoint.

déf 35 [GOU 258] u est normal si $u \circ u^* = u^* \circ u$

Lemme 36 Soit F sev de E stable par u. Alors $F^\perp$ stable par u^*.

Lemme 37 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal. Si E_λ est un sous-espace propre de u (associé à la valeur propre λ), alors $E_\lambda^\perp$ stable par u. (DÉV 2)

Th 38 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :
1] u normal
2] u se diagonalise dans une base orthonormale de E.
3] u et u^* se diagonalisent dans une base orthonormale commune.
(DÉV 2)

III] Application à la théorie des représentations [SER, 17-19]

Soit G un groupe fini, V un $\mathbb{C}$-ev.

déf 39 Soit $\rho : G \to GL(V)$ représentation linéaire et W sev de V tq $\forall g \in G$, W stable par $\rho(g)$.
Alors $\rho|_W : G \to GL(W)$ est une représentation linéaire de G dans W et on dit que W est une sous-représentation de V.

Th 40 Soit $\rho : G \to GL(V)$ représentation linéaire et W sous-représentation de V.
Alors il existe un supplémentaire de W dans V stable par $\rho(g)$, $\forall g \in G$.

déf 41 Soit $\rho : G \to GL(V)$ représentation linéaire. Elle est irréductible si elle n'admet aucune sous-représentation autre que V et $\{0\}$
(Autrement dit, elle est irréductible si V n'est pas réduit à 0 et si les seuls sous-espaces vectoriels de V stables par G sont V et $\{0\}$)

Th 39 (Maschke) Toute représentation est somme directe de représentations irréductibles.

DÉVELOPPEMENTS

1] (Prop 23) ⊕ Prop 24 ⊕ Corollaire 25

2] Prop 14 ⊕ Lemmes 36, 37 ⊕ Th 38

RÉFÉRENCES

[BEC] Beck, Objectif Agrégation
[DEB] Debeaumarché, Manuel de Mathématiques, Vol 4
[GOU] Gourdon, Algèbre
[FGN] Francinou, Algèbre 2
[COG] Cogmet, Algèbre linéaire
[SER] Serre, Représentations linéaires des groupes finis.