Leçon 201 : Espaces de fonctions, exemples et applications

I] Espace de fonctions continues

Soit K compact de $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}^0(K)$ l'ensemble des fonctions continues sur K à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1] Continuité

Prop 1 [GOU 31] Soit $f \in \mathcal{C}^0(K)$. Alors $f(K)$ est compact.

Prop 2 [GOU 31] Soit $f \in \mathcal{C}^0(K)$. Alors f est bornée et atteint ses bornes.

déf 3 [GOU 12] Soit $f \in \mathcal{C}^0(K)$. f est uniformément continue sur K si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0, \forall x, y \in K, |x-y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Th 4 (HEINE) [GOU 31] Soit $f \in \mathcal{C}^0(K)$. Alors f est uniformément continue.

2] Convergence uniforme (cvu)

déf 5 [GOU 231] Soit $(f_m)_m$ suite de fonctions continues. On dit que $(f_m)_m$ cvu vers f sur K si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m \geq N, \forall x \in K, |f_m(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

Th 6 [GOU 233] Soit $(f_m)_m \in (\mathcal{C}^0(K))^{\mathbb{N}}$. Si $(f_m)_m$ cvu vers f sur K alors $f \in \mathcal{C}^0(K)$

déf 7 [HL 24] On munit $\mathcal{C}^0(K)$ de la norme uniforme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)|$.

Prop 8 L'espace $(\mathcal{C}^0(K), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

Lemme 9 (DINI) [HL 25] Soit $(f_m)_m \in (\mathcal{C}^0(K))^{\mathbb{N}}$ suite croissante à valeurs dans $\mathbb{R}$ cvs vers $f \in \mathcal{C}^0(K, \mathbb{R})$. Alors $(f_m)_m$ cvu vers f.

Appli 10 [HL 26] On définit la suite de fonctions polynomiales $(P_m)_m$ sur $[-1,1]$ par $\begin{cases} P_0 = 0 \\ \forall m \in \mathbb{N}, P_{m+1}(x) = P_m(x) + \frac{1}{2}(x^2 - P_m^2(x)) \end{cases}$.

Alors $(P_m)_m$ cvu vers $x \mapsto |x|$ sur $[-1, 1]$.

Th 11 (WEIERSTRASS) [GOU 235]. Toute fonction $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de fonctions polynômiales. (Dév 1)

Appli 12 Si $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$ et si $\forall m \in \mathbb{N}, \int_a^b f(t) t^m dt = 0$, alors $f \equiv 0$ sur $[a,b]$

Appli 13 $(\mathcal{C}^0([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ est séparable.

Th 14 (STONE - WEIERSTRASS) [HL 29] Soit $A \subset \mathcal{C}^0(K)$. Si A est une sous-algèbre unitaire (A contient la constante 1), séparable et si, lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, A est stable par conjugaison complexe, Alors A est dense dans $\mathcal{C}^0(K)$.

Appli 15 [HL 30] $\mathrm{Lips}_C(K, \mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{C})$.

3] Théorème d'Ascoli

Soit X espace métrique compact dont la distance est d. On munit $\mathcal{C}^0(X, \mathbb{K})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

déf 16 [QUE 149] Une partie A de $\mathcal{C}^0(X, \mathbb{K})$ est dite équicontinue si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in X, \forall f \in A, (d(x,y) \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon)$

ex 17 [HL 38] Si $k > 0$, $\mathrm{Lipsc}_k(X, \mathbb{K})$ est équicontinue.

déf 18 [QUE 149] A est dite relativement compacte $\Leftrightarrow \overline{A}$ est compacte.

Th 19 (ASCOLI) [HL 39] Soit $A \subset \mathcal{C}^0(X, \mathbb{K})$.
A est équicontinue bornée $\Leftrightarrow$ A est relativement compacte.

Appli 20 [HL 39] Soit $(f_m)_m$ continues sur $[a,b]$ tq $A = \{f_m, m \in \mathbb{N}\}$ est équicontinue et $\exists M > 0, \forall m \in \mathbb{N}, |f_m(x)| \leq M$. Alors A est relativement compact dans $\mathcal{C}^0([a,b])$, donc on peut en extraire une sous-suite convergeant dans $[a,b]$.

II] Espaces de Lebesgue [BRI 153-...]

On fixe $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

1] Généralités sur l'espace L^p

déf 21 Soit $p > 0$. On définit $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}} = \{f : X \to \mathbb{K} \text{ mesurables} / \int_X |f|^p d\mu < \infty\}$. On note $\|f\|_p = (\int_X |f|^p d\mu)^{1/p}$
De plus, on définit $L^p_{\mathbb{K}} = \mathcal{L}^p_{\mathbb{K}} / \{\|\cdot\|_p = 0\}$. C'est un $\mathbb{K}$evn.

ex 22 Si m désigne la mesure de comptage sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, alors :
$\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(m) = \ell^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}) := \{(a_m)_m \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} / \sum |a_m|^p < +\infty\}$

Prop 23 Si $\mu(X) < \infty$, alors $0 < p \leq q \Rightarrow L^q \subset L^p$.

Rque 24 La réciproque est fausse : $x \mapsto 1/\sqrt{1+x^2} \in L^2_{\mathbb{R}}$ mais $\notin L^1_{\mathbb{R}}$

Th 25 (HÖLDER) Soit $f \in \mathcal{L}^p$, $g \in \mathcal{L}^q$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ pour $p, q > 1$. Alors $fg \in \mathcal{L}^1$ et $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.
On a égalité ssi $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0,0)\}$ tels que $\alpha |f|^p = \beta |g|^q$ μ-pp.

Appli 26 (CAUCHY - SCHWARZ) Si $p = q = 2$, on a $\forall f, g \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}$, $f\overline{g} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}$ et $|\int_X f\overline{g} d\mu| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$

Th 27 (MINKOWSKI) Soit $f_m : X \to \overline{\mathbb{R}_+}$, $m \geq 1$, une suite de fonctions ≥ 0
Alors $\forall p \in [1, +\infty[$, $\|\sum f_m\|_p \leq \sum \|f_m\|_p \leq +\infty$

Csq 28 [FAR 41] Pour $1 < p < \infty$, $\mathcal{L}^p$ est un $\mathbb{C}$ev et $f \mapsto \|f\|_p$ est une semi norme sur cet ev.

Th 29 (RIESZ-FISHER)
a) $\forall p \in [1, +\infty[$, $(L^p, \|\cdot\|_p)$ complet
b) Soit $(f_m)_m \in (\mathcal{L}^p)^{\mathbb{N}}$, $f \in \mathcal{L}^p$. Si $f_m \xrightarrow{\|\cdot\|_p} f$, $\exists$ une suite extraite $(f_{\varphi(m)})_m$ et $g \in \mathcal{L}^p$ telles que $|f_{\varphi(m)}| \leq g$ μpp et $f_{\varphi(m)} \xrightarrow{\mu pp} f$.

Scanné avec CamScanner

2] Densité dans L^p

Prop 30 $\forall p \in [1,+\infty[$, l'ensemble des fonctions étagées intégrables est dense dans L^p.

Th 31 Sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, on a :

a) L'ensemble des fonctions en escalier à support compact est dense dans $L^p_{\mathbb{K}}(\lambda)$, $1 \leq p < \infty$

b) L'ensemble des fonctions continues à support compact est dense dans L^p, $1 \leq p < \infty$.

Appli 32 [FAR 135] L'espace $S(\mathbb{R})$ est contenu dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ pour $p \in [1,+\infty]$ et pour $1 \leq p < \infty$, il s'identifie à un sous-espace dense de $L^p(\mathbb{R})$

Prop 33 L'espace normé $L^p_{\mathbb{R}}(\lambda)$ est séparable si $1 \leq p < \infty$ et $L^\infty_{\mathbb{R}}$ ne l'est pas.

Prop 34 (Inégalité de HARDY) Soit $p \in]1,+\infty[$ réel. $\forall f \in L^p(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, on pose $T_f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$. Alors $T_f \in L^p(\mathbb{R}_+)$ et on a $\|T_f\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_p$.

(DÉV 2 [BER p86])

3] Cas particulier : $L^2_{\mathbb{K}}$

Prop 35 L'application définie sur $L^2_{\mathbb{K}} \times L^2_{\mathbb{K}}$ par $(f,g)_2 = \int_X f\bar{g}\,d\mu$ est une forme sesquilinéaire. On définit la norme hilbertienne par $\|f\|_2 = \sqrt{(f,f)_2}$. $(L^2_{\mathbb{K}}, \|.\|_2)$ est un espace de Hilbert.

Th 36 Soit F sev fermé de $L^2_{\mathbb{K}}$. Alors $g \in L^2_{\mathbb{K}}$ peut se décomposer de façon unique sous la forme $g = f + h$ où $f \in F$ et $(\varphi, h)_2 = 0$, $\forall \varphi \in F$, ie $L^2_{\mathbb{K}} = F \oplus F^\perp$ où $F^\perp = \{u \in L^2_{\mathbb{K}} / \forall \varphi \in F, (\varphi, u)_2 = 0\}$.
f est appelé la projection orthogonale de g sur F. Elle est aussi caractérisée par $\|g - f\|_2 = \min_{\varphi \in F} \|g - \varphi\|_2$.

Th 37 Soit $\phi : L^2_{\mathbb{K}} \to \mathbb{K}$ forme linéaire continue. Alors $\exists ! g \in L^2_{\mathbb{K}}$ telle que $\forall f \in L^2_{\mathbb{K}}$, $\phi(f) = \int_X f\bar{g}\,d\mu$.

déf 38 Soit $I \subset \mathbb{R}$ intervalle. On appelle fonction poids une fonction $\rho : I \to \mathbb{R}$ [BEC 110] mesurable positive et telle que $\forall m \in \mathbb{N}$, $\int_I |x|^m \rho(x)\,dx < \infty$.
On note $L^2(I,\rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité ρ par rapport à la mesure de Lebesgue, ie muni du produit scalaire : $\langle f,g \rangle_\rho = \int_I f(x)\overline{g(x)}\rho(x)\,dx$.
$L^2(I,\rho)$ est un espace de Hilbert.

Th 39 [BEC] $\exists ! (P_m)_m$ famille de polynômes unitaires 2 à 2 orthogonaux tels que $\deg(P_m) = m$. Cette famille s'appelle la famille des polynômes orthogonaux associés à la fonction ρ.

Th 40 [BEC] Soit $I \subset \mathbb{R}$ intervalle, ρ une fonction poids. Si $\exists \alpha > 0$ tel que $\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)\,dx < \infty$, alors la famille des polynômes orthogonaux associés à ρ forment une base hilbertienne de $(L^2(I,\rho), \|.\|_\rho)$

Appli 41 [BEC 112]
① Sur $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, on dispose de la base hilbertienne $(t \mapsto e^{int})_{n \in \mathbb{Z}}$
② Les polynômes de Hermite $(P_m)_m$ forment une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R},\rho)$ pour $\rho : x \mapsto e^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$)
③ $(P_m(x)e^{-x^2/2})_{m \in \mathbb{N}}$ forment une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$

Th 42 (LAX MILGRAM) [BRE 84] Soit $a : L^2 \times L^2 \to \mathbb{R}$ bilinéaire continue et coercive (ie $\exists \alpha > 0, \forall x \in L$, $a(x,x) \geq \alpha\|x\|^2$). Soit L forme linéaire continue sur L^2.
Alors $\exists ! u \in L^2$ telle que $\forall v \in L^2$, $a(u,v) = L(v)$
De plus, si a est symétrique, u est caractérisée par $\frac{1}{2}a(u,u) - L(u) = \min_{v \in L^2}\{\frac{1}{2}a(v,v) - L(v)\}$.

Appli 43 Ce théorème est utilisé pour la résolution d'équations aux dérivées partielles linéaires elliptiques (voir IV).

III] Espace de fonctions holomorphes

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$.

1] Généralités

déf 44 [TAU 50] + [TAU 39]
① Soit f définie sur U. f est analytique sur $U \Leftrightarrow f$ est développable en série entière en tout point de U. L'ensemble se note $\mathcal{A}(U)$.
② f est holomorphe sur U ($f \in \mathcal{H}(U)$) $\Leftrightarrow \forall z_0 \in U$, $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existe.

Rque 45 $f \in \mathcal{A}(U) \Rightarrow f \in \mathcal{C}^\infty(U) \Leftrightarrow f \in \mathcal{H}(U)$

Th 46 (CAUCHY) [TAU 84]. Soit $R \in \mathbb{R}_+^*$, $f \in \mathcal{H}(D(z_0,R))$. Si $z \in D(z_0,R)$, on a $f(z) = \sum_{m \geq 0} a_m (z-z_0)^m$ et alors $a_m = \frac{1}{m!}f^{(m)}(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{(re^{it})^m}\,dt$, $r \in]0,R[$ et $|f^{(m)}(z_0)| \leq \frac{m!}{R^m}\max_{\mathcal{C}(z_0,R)}|f|$

déf 47 Une fonction entière est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ entier.

Th 48 (LIOUVILLE) Toute fonction entière et bornée est constante.

Appli 49 ① Théorème de d'Alembert : Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ non constant a au moins une racine dans $\mathbb{C}$.
② Si f est entière telle que $\lim_{|z| \to \infty} |f(z)| = 0$, alors $f \equiv 0$ sur $\mathbb{C}$.

2] Propriétés topologiques

Th 50 [TAU 155] Soit $(f_m)_m \in (\mathcal{H}(U))^{\mathbb{N}}$ cvu sur tout compact vers f. Alors :
1) $f \in \mathcal{H}(U)$
2) Si $j \in \mathbb{N}$, $(f_m^{(j)})$ cvu sur tout compact vers $f^{(j)}$

Scanné avec CamScanner

[3]

Prop 51 [TAU 155] Soit $(K_m)_{m\geq 1}$ compacts non vide de U vérifiant :
1) $\bigcup_m K_m = U$ et $\forall m \geq 1$, $K_m \subset K_{m+1}$
2) $\forall K \subset U$ compact, $\exists m \geq 1$ tel que $K \subset K_m$.
On note $\|f\|_K = \sup_K |f|$ et on pose $d(f,g) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \min\{1, \|f-g\|_{K_m}\}$ une distance sur $\mathcal{H}(U)$.
Ainsi $(\mathcal{H}(U), d)$ est complet.

Th 52 (MONTEL) Soit $\mathcal{P}$ une partie de $\mathcal{H}(U)$. $\mathcal{P}$ relativement compacte dans $\mathcal{H}(U)$ $\Leftrightarrow$ $\mathcal{P}$ bornée sur tout compact de U.

Rque 53 C'est une variante du théorème d'Ascoli pour les fonctions holomorphes.

Th 54 Soit U domaine. Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(U)$ et uniformément bornée sur tout compact de U alors $\mathcal{F}$ est une famille normale (ie toute suite de $\mathcal{F}$ contient une sous suite cvu sur les sous-ensembles compacts de U.

IV] Espaces de Sobolev

1] Généralités

Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, $p \in [1, +\infty]$ réel.

déf 55 [BRE 180] L'espace de Sobolev $W^{1,p}(I)$ est défini par :
$W^{1,p}(I) = \{u \in L^p(I) \,/\, \exists g \in L^p(I) \text{ tel que } \int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi, \ \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(I)\}$ avec $\mathcal{C}_c^1$ l'espace des fonctions $\mathcal{C}^1$ à support compact.
On munit cet espace de la norme $\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_p + \|u'\|_p$

Prop 56 $\begin{cases} W^{1,p} \text{ est un espace de Banach pour } 1 \leq p \leq \infty \\ W^{1,p} \text{ est séparable pour } 1 \leq p < \infty \end{cases}$

Th 57 [BRE 162] $W^{1,p}(I) \subset L^q(I)$ avec $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$

2] Cas particulier : $H^1(I)$

déf 58 $H^1(I) = W^{1,2}(I)$ et on peut le munir du produit scalaire suivant :
$(u,v)_{H^1} = (u,v)_{L^2} + (u',v')_{L^2}$.

Prop 59 H^1 est un espace de Hilbert séparable.

déf 60 Pour $1 \leq p < \infty$, on désigne $W_0^{1,p}(I)$ la fermeture de $\mathcal{C}_c^1(I)$ dans $W^{1,p}(I)$. On note $H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I)$. On munit H_0^1 du produit scalaire induit par H^1.

Th 61 [BRE 133] Soit $u \in H^1(I)$. En notant $I =]a,b[$, on a :
$u \in H_0^1(I) \Leftrightarrow u(a) = u(b) = 0$

Prop 62 (Inégalité de POINCARÉ) Supposons I borné. Alors $\exists C$ constante telle que $\|u\|_{H^1} \leq C \|u'\|_{L^2}$, $\forall u \in H_0^1(I)$.

3] Application : Résolution d'EDP, Problème de Dirichlet

déf 63 [BRE 135] Soit $(E_1) : \begin{cases} -u'' + u = f \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$ sur $I =]0,1[$, f fonction.
La condition aux limites s'appelle la condition de Dirichlet (homogène).

Une solution faible de (E_1) est une fonction $u \in H_0^1(I)$ vérifiant :
$\forall v \in H_0^1(I)$, $\int_I u'v' + \int_I uv = \int_I fv$ ⊛

Prop 64 $\forall f \in L^2$, $\exists! u \in H_0^1$ solution de ⊛. De plus, u s'obtient par : $\min_{v \in H_0^1} \{ \frac{1}{2} \int_I (v'^2 + v^2) - \int_I fv \}$. C'est le principe de Dirichlet.

Prop 65 Si $f \in \mathcal{C}^0(I)$, alors la solution faible u appartient à $\mathcal{C}^2(I)$.

Développements

1. Théorème de Weierstrass par convolution
2. Inégalité de Hardy

Références

[GOU] Gourdon, Analyse les Maths en tête
[HL] Hirsch, Lacombe, Éléments d'analyse fonctionnelle
[QUE] Queffélec, Zuily, Analyse pour l'agrégation 4e édition
[BRI] Briane Pagès, Théorie de l'intégration
[FAR] Jacques Faraut, Calcul intégral
[BEC] Objectif agrégation, Beck, Malick, Peyré
[BER] Bernis, Analyse pour l'agrégation, 40 dév.
[BRE] Brezis, Analyse fonctionnelle
[TAU] Tauvel, Analyse complexe pour la licence 3.

Scanné avec CamScanner