Leçon 229 : Fonctions monotones / convexes . Exs et applis

113

I] Fonctions monotones

1] Généralités [RAM 118-120]

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$, $f,g : I \to \mathbb{R}$ fonctions.

déf 1 f est croissante (resp. décroissante) $\Leftrightarrow \forall x,y \in I$, $x \leq y$ implique $f(x) \leq f(y)$ (resp $f(x) \geq f(y)$). On dit que f monotone si elle est croissante ou décroissante. (Si les inégalités sont strictes, on parle de monotonie stricte).

ex 2 • $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et décroissante sur $\mathbb{R}^-$.
• La fct de répartition d'une variable aléatoire est croissante.

Notations $M(I)$ l'ensemble des fcts monotones sur I
$M^+(I)$ " croissantes, $M^-(I)$ décroissantes.

Prop 3 ① Si $f \in M^\pm(I)$ alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+$, $\lambda f \in M^\pm(I)$
② Si $f,g \in M^\pm(I)$ alors $f+g \in M^\pm(I)$
③ Si $f,g \in M^+(I)$, $f,g \geq 0$, alors $fg \in M^+(I)$
④ Si $f,g \in M^+(I)$ ou $M^-(I)$, alors $f \circ g \in M^+(I)$.
⑤ Si $f \in M^+(I)$, $f>0$, alors $\frac{1}{f} \in M^-(I)$.

cex 4 Dans ③, l'hypothèse "$f,g \geq 0$" est primordiale. En effet, on a : $x \mapsto x \in M^+(\mathbb{R})$ mais $x \mapsto x^2 \notin M^+(\mathbb{R})$

Prop 5 Soit $f \in M(I)$. Alors f injective $\Leftrightarrow$ f strict. monotone.

2] Limite et continuité

Th 6 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ monotone, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ tq a est adhérent à $I \cap]a,+\infty[$. Alors f admet une limite à droite en a.

Coro 7 Soit $f \in M(I)$, $a \in I$. Si $a \neq \sup I$, alors f admet une limite finie à droite $f(a^+)$. De la même façon, si $a \neq \inf I$, f admet une limite finie à gauche $f(a^-)$.

Th 8 Soit $f \in M(I)$. L'ens des pts de discontinuité est dénombrable.

ex 9 [HAU 190] Il existe des fcts strict croissante sur $[0,1]$ dont l'ens des pts de discontinuité est dense dans $[0,1]$.
Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \cap]0,1[$ bijection. On pose $A_x = \{m \in \mathbb{N} / \varphi(m) < x\}$
et $u_m : [0,1] \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \begin{cases} 1/2 & \text{si } m \in A_x \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

On a alors $f : x \mapsto \sum_{m \geq 0} u_m(x)$ strict croissante et disc en tt pt de $\mathbb{Q} \cap]0,1[$

Prop 10 [RAM 120] $f \in M(I)$ $\underline{c}$ sur $I \Leftrightarrow f(I)$ est un intervalle

Th 11 Soit f strict monotone et $\underline{c}$ sur I. Alors $J = f(I)$ est un int. et f induit un homéomorphisme de I sur J.
Réciproquement, si f homéomorph. de I sur J, alors f strict. monotone.

ex 12 La fct sinus induit un homéomorphisme croissant de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1,1]$ de réciproque strict. croissante.

3] Dérivabilité

Th 13 [ROM 251] (ROLLE) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $\underline{c}$ sur $[a,b]$ et $\underline{d}$ sur $]a,b[$ tq $f(a) = f(b)$. Alors $\exists c \in]a,b[$ tq $f'(c) = 0$.

Th 14 [ROM 258] (TAF) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $\underline{c}$ sur $[a,b]$, $\underline{d}$ sur $]a,b[$
Alors $\exists c \in]a,b[$ tq $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$

Appli 15 [ROM 261] C'est utile pour montrer le théorème svt :
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ $\underline{c}$ sur I, $\underline{d}$ sur $\mathring{I}$. Alors f croissante sur I ssi $\forall x \in \mathring{I}$, $f'(x) \geq 0$.

Th 16 [RAM 123] Les fcts monotones sont dérivables presque partout.

4] Théorèmes de DINI [GOU 238]

Th 17 Soit (f_m) une suite croissante de fcts réelles $\underline{c}$ déf sur $I = [a,b]$ segment de $\mathbb{R}$. Si (f_m) cvs vers f $\underline{c}$ sur I, alors la cv est uniforme.

Th 18 Soit (f_m) une suite de fcts croissantes réelles, $\underline{c}$ et déf sur $I \subseteq \mathbb{R}$
Si (f_m) cvs vers f $\underline{c}$ sur I. Alors la cv est uniforme.

5] Applications

1 Suites récurrentes [GOU 200]

Th 19 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ tq $f(I) \subset I$ et la suite (u_m) définie par :
$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall m, u_{m+1} = f(u_m) \end{cases}$. Alors si f est croissante, (u_m) est monotone et son sens de monotonie est donné par le signe de $u_1 - u_0$.
Si f est décroissante, comme $f \circ f$ croissante, on en déduit que (u_{2m}) et (u_{2m+1}) sont monotones, et leur sens de monotonie est opposé.

2 Comparaison Σ - $\int$ [GOU 212]

Th 21 Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ cpm et décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Alors la suite (u_m) déf par $\forall m \in \mathbb{N}$, $u_m = \sum_{k=0}^m f(k) - \int_0^m f(t)\,dt$ cv. En particulier, $\sum f(n)$ et $\int_0^\infty f(t)\,dt$ sont de m̂ nature.

Rque 22 Ce résultat reste vrai si f est décroissante slmt à partir d'une certaine abscisse.

2/3

Appli 23 En notant γ cste d'Euler, on retrouve $H_n = \log(n) + \gamma + o(1)$

II] Fonctions convexes

1] Généralités [ROM 225-234]

déf 24 Soit $f : I \to \mathbb{R}$. f est convexe $\iff \forall (a,b) \in I^2, \lambda \in [0,1]$, on a : $f((1-\lambda)a + \lambda b) \leq (1-\lambda) f(a) + \lambda f(b)$. De plus, f concave $\iff -f$ convexe.

ex 25 $x \mapsto |x|$ et $x \mapsto e^x$ sont convexes sur $\mathbb{R}$

cex 26 la composée de 2 fcts convexes n'est pas convexe ($x \mapsto -x^2$)

Th 27 $f : I \to \mathbb{R}$ convexe $\iff \forall (A,B)$ points du graphe de f où $A \begin{vmatrix} a \\ f(a) \end{vmatrix}$ et $B \begin{vmatrix} b \\ f(b) \end{vmatrix}$ avec $a<b$, la courbe représentative de la restriction de f à $[a,b]$ est en dessous du segment $[AB]$.

ex 28 $x \mapsto x^3 = x^2 . x$ pas convexe car le graphe de la restriction à $[-1,1]$ n'est pas sous la corde. Plus généralement, le produit de 2 fcts convexes n'est pas toujours convexe.

Th 29 f convexe $\iff$ son épigraphe est convexe.

Th 30 $f : I \to \mathbb{R}$ continue est convexe $\iff \forall (x,y) \in I^2, f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$

Th 31 Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Les prop. svtes sont équivalentes :

1 f convexe

2 $\forall x < y < z$ dans I, $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$.

3 $\forall a \in I$, $\tau_a : x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ croissante sur $I \setminus \{a\}$.

Appli 32 Une fct de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ affine $\iff$ convexe et concave

Appli 33 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ constante $\iff$ f est convexe et majorée.

2] Fcts logarithmiquement convexe [ROM p228]

déf 34 f définie sur I à valeurs strict positives est logarithm. convexe ssi $\ln(f)$ est convexe sur I.

Prop 35 log-convexe $\Rightarrow$ convexe

Th 36 [RUD 94] Soit f définie et positive sur $]0,+\infty[$ telle que :

1 $f(x+1) = x f(x)$

2 $f(1) = 1$

3 f est log-convexe sur $]0,+\infty[$.

<DÉV 1>

Alors $f(x) = \Gamma(x)$ sur $]0,+\infty[$ où $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \, dt$.

Appli 37 [ROM EX 132] On définit sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$ la fct bêta par $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$, $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} \, dt$ <DÉV 1>

Alors $B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

3] Régularité

a) Cas réel (dim 1) [ROM 235]

Th 38 Si f convexe sur I, alors elle admet une dérivée à dte et à gche en tout point de $\mathring{I}$. Les fcts dérivées à dte/gche sont $\uparrow$ sur $\mathring{I}$ et $\forall a<b$, on a : $f'_g(a) \leq f'_d(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'_g(b) \leq f'_d(b)$

Coro 39 Une fct convexe sur I est $\underline{C}$ sur $\mathring{I}$

Th 40 f convexe sur $I \Rightarrow f$ $\underline{C}$ et $\underline{d}$ à droite sur I tq f'_d croissante.

Th 41 Soit f $\underline{d}$ sur I. Les prop svtes sont éq :

1 f convexe

2 f' croissante sur I

3 $\mathcal{C}_f$ est au dessus de sa tangente en tout point de I.

Th 42 Soit f 2 fois $\underline{d}$ sur I. Alors f convexe sur $I \iff \forall x \in I, f''(x) \geq 0$

ex 43 : ln strict concave sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\Gamma : x \mapsto \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} \, dt$ convexe sur $\mathbb{R}^{+*}$

b) dim ≥ 1 [HIRp3]

Th 44 Soit f différentiable sur un ouvert O de $\mathbb{R}^n$, C convexe de O. Alors f convexe sur $C \iff \forall (x,y) \in C^2, f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x-y \rangle$

Th 45 Soit f 2 fois différentiable sur O. Si $\nabla^2 f(x)$ est défini positif pour $x \in O$, alors f est strictement convexe sur O.

4] Applications

a) Inégalités de convexité

Th 46 [GOU 97] (Inég arithmético-géo) Soit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$. On a : $(a_1 \cdots a_n)^{1/n} \leq \frac{1}{n}(a_1 + \dots + a_n)$ <DÉV 2>

Th 47 [FGN 1 208] (Carleman) Soit $\sum a_n$ série cv à termes positifs. Alors $\sum_{n \geq 1} (a_1 \cdots a_n)^{1/n} \leq e \sum_{n \geq 1} a_n$ où e est la meilleure constante.
<DÉV 2>

Lemme 48 [ROM 239] Soit $p,q>0$ tq $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors $\forall (u,v) \in \mathbb{R}_+^{*2}$, $u^{1/p} v^{1/q} \leq \frac{u}{p} + \frac{v}{q}$.

ex49 $\forall x \in]0,\pi/2[$, $\frac{2x}{\pi} < \sin(x) < x$

Appli 50 (Hölder) Soit $x, y \in \mathbb{R}^n$, $p,q \in \mathbb{R}_+^*$ tq $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Alors [ROM 38]
$$\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{1/q}$$

déf51 [ROM 240] Soit $(x_i)_{i\in[1,p]}$ suite de points d'un ev E, $x \in E$ est combi linéaire convexe des x_i $\iff \exists \lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{R}_+^*$, $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$ et $x = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i$.

Th52 (Jensen) Soit $I \subseteq E$ partie convexe.
$f : I \to \mathbb{R}$ convexe $\iff$ $\forall$ combi lin convexe $\sum \lambda_i x_i$ de pts de I, on a :
$$f\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^p \lambda_i f(x_i).$$

Th53 Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe, alors $\forall u$ fct continue sur $[a,b]$, on a :
$$f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b u(t)\,dt\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f\circ u(t)\,dt.$$

B] Proba

Th54 [BL 56]

1. (Jensen) Si ϕ convexe sur $\mathbb{R}$ et X v.a.r telle que X et $\phi(X)$ $\int$ables. Alors $\phi(E(X)) \leq E(\phi(X))$
2. Si $X \in L^p$, $Y \in L^q$, $p,q \geq 1$ tq $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, alors $XY \in L^1$ et on a :
$E(|XY|) \leq (E(|X|^p))^{1/p}(E(|Y|^q))^{1/q}$
3. $p \mapsto E(|X|^p)^{1/p}$ est croissante.

Appli55 • Si X $\int$able, $|E(X)| \leq E(|X|)$
• Si X de carré $\int$able, $E(X)^2 \leq E(X^2)$

déf56 [APP 160] Soit X v.a à valeurs ds $\mathbb{N}$. On déf la fct génératrice de X par $g_X(t) = \sum_{k\geq 0} P(X=k)t^k = E(t^X)$

Prop57 g_X est bien définie, croissante et convexe sur $[0,1]$. Si $P(X=k)>0$ pour au moins un $k \geq 2$, alors g_X est strict convexe sur $[0,1]$.

Th58 [APP 195] (Processus de branchement de Galton-Watson).
Soit $(X_{i,j})_{i,j\geq 1}$ des variables aléatoires indépendantes de m̂ loi à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note m leur espérance et on déf le processus $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $Z_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{n,i}$
On pose $p = P(\{\exists n \geq 0, Z_n = 0\})$
Alors si $m \leq 1$, $p = 1$.
si $m > 1$, $p < 1$.

C] Optimisation ; méthode du gradient à pas optimal [BER 159]

Méthode 59 Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On cherche une solution approchée dans $\mathbb{R}^n$ du système d'inconnue x, $Ax = b$. $(*)$
A étant inversible, $(*)$ admet une unique solution $\bar{x}$. Notons λ_{max} et λ_{min} resp la $+$ grande et la $+$ petite des vap de A.
On associe à A le prod scalaire : $\forall x,y \in \mathbb{R}^n$, $\langle x,y\rangle_A = {}^t x A y = \langle x, Ay\rangle$
et enfin, Notons $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{2}\|x\|_A^2 - {}^t x b$. et $\nabla\phi(x) = A(x-\bar{x})$

1. ϕ atteint son minimum en $\bar{x}$
2. Soit $a \in \mathbb{R}^n$, $\neq \bar{x}$, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ suite déf par :
$x_0 = a$, $\alpha_k = \begin{cases} \|\nabla\phi(x_k)\|^2 / \|\nabla\phi(x_k)\|_A^2 & \text{si } x_k \neq \bar{x} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, $x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla\phi(x_k)$

$(x_k)_k$ cv vers $\bar{x}$. De plus, $\forall k \geq 0$, $\|x_{k+1} - \bar{x}\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}}\left(\frac{\lambda_{max}-\lambda_{min}}{\lambda_{max}+\lambda_{min}}\right)^{k+1}\|x_0 - \bar{x}\|$

Lemme60 (Kantorovitch) $\forall x \in \mathbb{R}^n$, on a :
$$\frac{\|x\|^4}{\|x\|_{A^{-1}}^2\,\|x\|_A^2} \geq 4\,\frac{\lambda_{max}\lambda_{min}}{(\lambda_{max}+\lambda_{min})^2}$$
(inverser méthode et lemme)

DÉVS

1. Th36 + Appli 37 (Théorème de Bohr-Mollerup)
2. Inég arithm géo (Th46) + Inég Carleman (Th47)

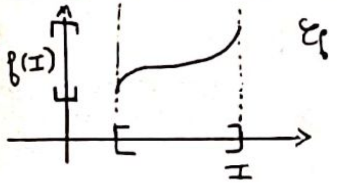
(Dévs possibles : Galton Watson Th58 ou méthode du gradient (M59).

Réfs

[BER] Bernis, Analyse pour l'agreg 40 dévs.
[ROM EX] Rombaldi, Exos et pbs pour l'agreg de maths
[RAM] Ramis Deschamps, Cours de Maths 3, Topo et élmts d'analyse
[HAU] Hauchecorne, Les contres-ex en maths
[ROM] Rombaldi, Elmts d'Analyse réelle
[GOU] Gourdon, Analyse
[HIR] Hiriart-Urruty, Optimisation et analyse convexe.
[FGN 1] Francinou, Analyse 1
[BL] Barbe Ledoux, Proba
[APP] Proba pour un non probabiliste
[RUD] Walter Rudin, Analyse réelle et complexe.

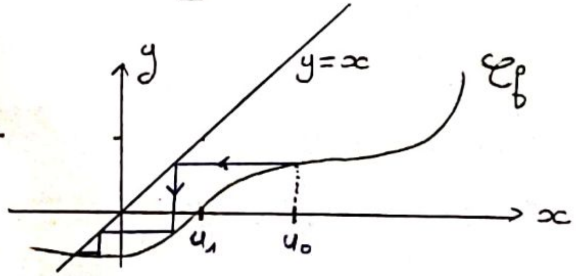
ANNEXES

Prop 11



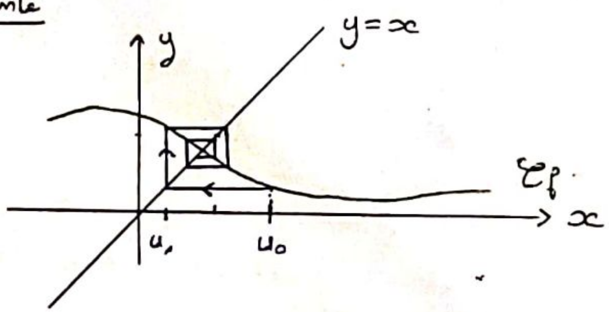
Th 19

① f croissante

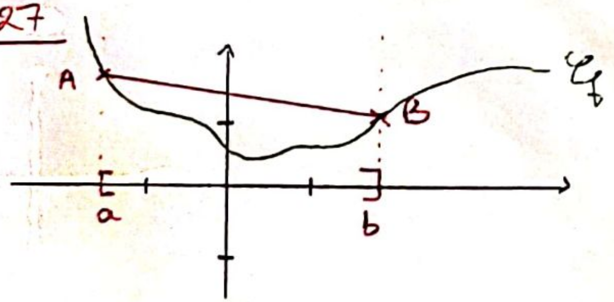


ici $u_1 - u_0 < 0$

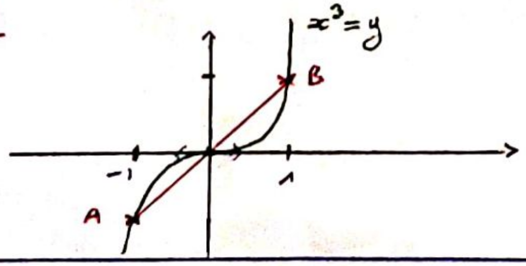
② f décroissante



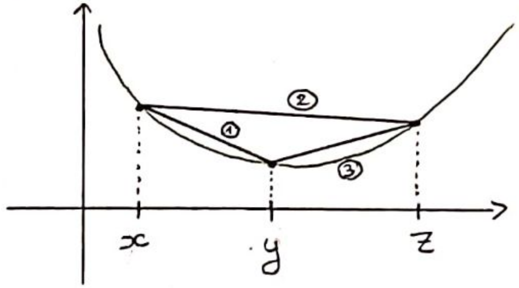
Th 27



ex 28

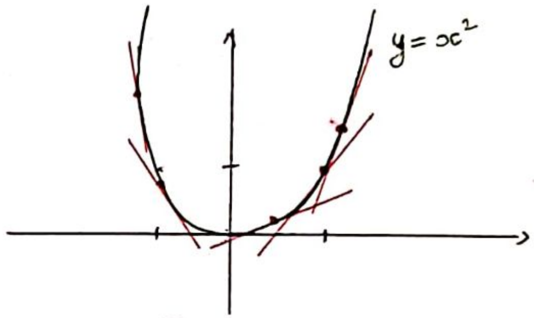


Th 31 ② Inégalité des pentes



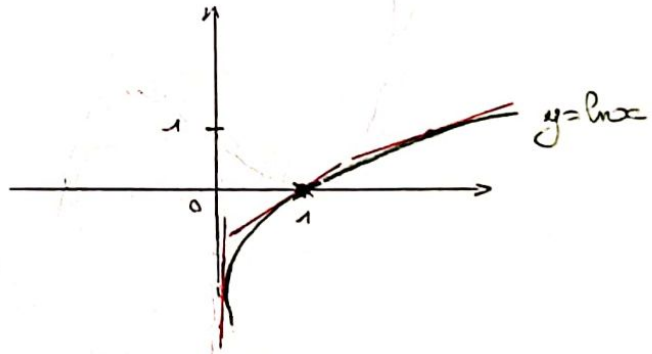
Th 41

①



$f'(x) = 2x$ ↗ sur $\mathbb{R}$

②



Méthode 59