206 Exemples d'utilisation de la notion de dimension finie en analyse

Soit $\mathbb{K}$ un corps égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé [evn] de dimension finie, $(E, \|\cdot\|)$.

I. Espaces vectoriels normés

FCOG

1) Topologie

Définition 1 : Deux normes sur E, notées $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont dites équivalentes si $\exists a > 0\ \exists b > 0$ tels que $\forall x \in E$, $a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_2$.

Exemple 2 : Sur $\mathbb{R}^n$, les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes.

Théorème 3 DEV 1 : Dans un evn de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Contre-exemple 4 : Dans l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$ et $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt$ $\forall f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ ne sont pas équivalentes.

Corollaire 5 : Tout evn de dimension finie est complet.

Contre-exemple 6 : Tout evn à base dénombrable n'est pas complet.

Corollaire 7 : Tout sous-espace vectoriel de dimension finie d'un evn est fermé.

2) Applications linéaires

FCOG G

Proposition 8 : Toute application linéaire de E dans un evn quelconque est continue.

Contre-exemple 9 : Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\|P\| = \|\sum a_i X^i\| = \sup |a_i|$. Alors l'application linéaire $f : \mathbb{R}[X]^{\geq 0} \to \mathbb{R}[X]$ définie par $P \mapsto P'$ n'est pas continue.

Écriture matricielle :

QCOG

Définition 10 : Soient E et F de $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, avec $\dim E = q \in \mathbb{N}^*$, $\dim F = p \in \mathbb{N}^*$. Soit B une base de E, $B = (e_1, \dots, e_q)$ et soit $B' = (e_1', \dots, e_p')$ une base de F. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Pour tout $j \in [\![1, q]\!]$, on a $f(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} e_i'$ où $a_{i,j} \in \mathbb{K}$. La matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq p,\ 1 \leq j \leq q}$ est la matrice de f dans les bases B et B'. De plus, $A = [f]_B^{B'}$.

GOUG

Proposition 11 : Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $M_{p,q}(\mathbb{K})$ est de dimension finie pq.
- Si B, B' sont (respectivement) une base de E et de F, alors $\Phi : \mathcal{L}(E,F) \to M_{p,q}(\mathbb{K})$ définie par $f \mapsto [f]_B^{B'}$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-ev. En particulier, $\dim(\mathcal{L}(E,F)) = \dim(M_{p,q}(\mathbb{K})) = p \cdot q$.

3) Compacité

GOUL

Proposition 12 : Les parties compactes de E sont les parties fermées bornées.

Exemple 13 : Dans $\mathbb{R}$, les segments $[a,b]$ sont les parties compactes.

Exemple 14 : Dans $M_n(\mathbb{R})$, $O_n(\mathbb{R})$ est compact.

Théorème 15 [Riesz] DEV 1 : Soit E un evn de dimension infinie. Alors la boule unité fermée de E n'est pas compacte.

Quelques mots sur les suites :

A retenir car demandé dans le rapport

Proposition 16 : Si E est de dimension finie, une suite bornée converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

Contre-exemple 17 : La suite $(-1)^n$ est bornée mais ne converge pas.

II. Calcul différentiel

GOUL

1) Différentielle et dérivées partielles

Définition 18 : Soient E et F 2 $\mathbb{R}$-evn, U un ouvert de E et $a \in U$. Une application $f : U \to F$ est différentiable en a s'il existe $\varphi \in \mathcal{L}_c(E,F)$ telle que :
$f(a+h) = f(a) + \varphi(h) + o(\|h\|)$ lorsque $h \to 0$

Si il existe, φ est unique et s'appelle la différentielle de f en a. On la note D_af.

Remarque 19 : • En dimension finie, l'existence et la valeur de D_af ne dépend pas de la norme choisie.
• La différentielle doit être continue. En dimension finie, le problème ne se pose pas car D_af est linéaire.

On travaille sur $E=\mathbb{R}^n$.

Définition 20 : Soit $f: U\subset\mathbb{R}^n\to F$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et F un evn. Soit $a\in U$ et soit $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Si pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, f est dérivable en a selon e_i, on dit f admet une dérivée partielle en a d'indice i et on note $f'_{e_i}(a)=\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

Théorème 21 : Soit $f: U\subset\mathbb{R}^n\to F$ une application où U est un ouvert et F est un evn. Si toutes les dérivées partielles de f sur U existent et si elles sont continues en un point a de U, alors f est différentiable en a et on a : $D_af=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\,dx_i$.

Proposition 22 : Soient $f: U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $\varphi: V\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ (où U et V sont des ouverts) telles que $\varphi(V)\subset U$. On écrit $\varphi=(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ où $\varphi_i: V\to\mathbb{R}$ pour tout i. Soit $a\in V$ tel que φ est différentiable en a et f est différentiable en $\varphi(a)$. Alors $F=f\circ\varphi: V\to\mathbb{R}$ est différentiable en a et $\forall j\in[\![1,m]\!]$, $\frac{\partial F}{\partial u_j}(a)=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(a))\cdot\frac{\partial\varphi_i}{\partial u_j}(a)$.

Remarque 23 : En dimension finie, cela signifie que la composée de 2 fonctions de classe C^p est de classe C^p. En particulier, la somme et le produit (pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$) de classe C^p est C^p.

2) Théorème d'inversion locale et Lemme de Morse

Théorème 24 : (Inversion locale) : Soient U un ouvert de E, $a\in U$ et $f: U\to F$ une application de classe C^k ($k\geq 1$). Si D_af est un isomorphisme de E dans F, alors il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}\subset U$ de a et un voisinage ouvert $W\subset F$ de $f(a)$ tels que $f|_{\mathcal{V}}$ est un C^k-difféomorphisme de $\mathcal{V}$ sur W.

Remarque 25 : L'utilisation du théorème d'inversion locale nécessite que l'espace de départ de f (de dimension n) et son espace d'arrivée (de dim p) aient la même dimension (i-e $n=p$). La condition imposée sur la différentielle signifie que son rang est maximum.

Lemme 26 : **DEV 2** : Soit $A_0\in GL_n(\mathbb{R})\cap S_n(\mathbb{R})$. Soit $\varphi: M_n(\mathbb{R})\to S_n(\mathbb{R})$ définie par $M\mapsto {}^tMA_0M$. Alors :
1) $D_I\varphi$ est surjective de noyau $\{H\in M_n(\mathbb{R})\mid A_0H\in A_n(\mathbb{R})\}$.
2) Il existe un voisinage V de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$, une application $A\mapsto M$ de V dans $GL_n(\mathbb{R})$ de classe C^1 telle que $A={}^tMA_0M$ $\forall A\in V$.

Théorème 27 [Lemme de Morse] **DEV 2** : Soit $f: U\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^3 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine. On suppose que $D_0f=0$ [0 est un point critique] et D^2_0f est non dégénérée de signature $(p,n-p)$. Alors il existe un C^1-difféomorphisme φ entre 2 voisinages de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(0)=0$ et $f(x)-f(0)=u_1^2+\dots+u_p^2-u_{p+1}^2-\dots-u_n^2$ où $u=\varphi(x)$.

II. Espaces préhilbertiens et séries de Fourier.

1) Projection orthogonale dans un espace préhilbertien

Définition 28 : Un espace préhilbertien H est un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire. S'il est complet pour la norme associée au produit scalaire, alors il est dit de Hilbert.

Remarque 29 : Un espace préhilbertien de dimension finie est un Hilbert. Soit H un espace préhilbertien de dim finie.

Théorème 30 : Si $F\subset(H,\langle,\rangle)$ est un sous-espace vectoriel de H de dimension finie alors pour tout $x\in H$, il existe un unique $y\in F$ tel que $\|x-y\|_H=d(x,F)=\inf_{z\in F}\|x-z\|_H$. De plus, $y\in F$ vérifie : $\forall f\in F$ $Re(\langle x-y,f-y\rangle)\leq 0$. On note $y=P_F(x)$ la projection de x sur F.

GOUL

BMP

BMP

ROU

BRE

BRE

Corollaire 31 : On a $H = F \oplus F^{\perp}$ et p_F est une application linéaire continue de norme 1.

2) Application : Séries de Fourier :

GOUL

Définition 32 : On note D l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 2π-périodiques, continues par morceaux et telles que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$. On munit D du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t)\, dt$.
D est ainsi un espace préhilbertien complexe muni de la norme hermitienne $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle}$.

Notation 33 : Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $e_n : x \mapsto e^{inx}$. La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est ainsi une famille libre orthonormale de D pour $\langle , \rangle$.

Proposition 34 : Soient $n \in \mathbb{N}$, $f \in D$. Le sous-espace vectoriel $P_n = \mathrm{Vect}(e_k)_{-n \le k \le n}$ vérifie $P_n \oplus P_n^{\perp} = D$. La projection orthogonale p_n sur P_n vérifie $S_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e_k = p_n(f)$ où $c_k(f) = \langle e_k, f \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt$ et de plus $\inf_{g\in P_n} \|f-g\|_2^2 = \|f - S_n\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt - \sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2$.

Corollaire 35 : • **[Inégalité de Bessel]** : $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$

• **[Parseval]** : $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$.

IV. Autres applications possibles :

1) Optimisation en dimension finie :

BMP

Proposition 36 : Soient C un ouvert de E, $f : C \to \mathbb{R}$ différentiable. Si x^* est un minimum local de f alors $d_{x^*} f = 0$.

Lemme 37 (Inégalité d'Euler) : Soient U ouvert de E, C un convexe de U et $f : U \to \mathbb{R}$. Si f admet un minimum local en $x^* \in C$ et si elle est différentiable en x^*, alors : $\forall y \in C$,
$(D_{x^*} f)\cdot(y - x^*) \ge 0$.

Proposition 38 : Soient E un evn de dimension finie et $f : E \to \mathbb{R}$ continue. Soit $C \subset E$ un fermé. Si f est coercive alors f est minorée sur C et atteint son minimum.

BMP

Théorème 39 [Extrema liés] : Soit $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in [\![1, m]\!]\, g_i(x) = 0\}$ où $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est C^1 $\forall i \in [\![1, m]\!]$. Soient $U \subset E$ ouvert contenant C et $f : U \to \mathbb{R}^n$. Si x^* est un extremum local de f dans C, si f est différentiable en x^* et si les différentielles $D_{x^*} g_1, \dots, D_{x^*} g_m$ sont linéairement indépendantes, alors il existe $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ tel que $d_{x^*} f + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i d_{x^*} g_i = 0$.

Application 40 : Inégalité arithmético-géométrique : pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x_i \ge 0$ $\forall i \in [\![1, n]\!]$: $\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

2) Equations différentielles : $E = K^n$

GOUL

Théorème 41 : Soit une équation différentielle linéaire $Y' = A(t)Y + B(t)$ où $A : I \to M_n(K)$, $B : I \to K^n$ sont continues. Alors pour tout $t_0 \in I$ et pour tout $X_0 \in K^n$, il existe une unique solution V définie sur I tout entier avec $V(t_0) = X_0$.

Théorème 42 : Soit $A : I \to M_n(K)$ continue. L'ensemble S_H des solutions maximales de (H) : $\frac{dY}{dt} = A(t)Y$ est un sous-espace vectoriel de dimension n du K-ev $C^1(I, K^n)$.

Proposition 43 : Soit $A \in M_n(K)$. L'équation différentielle $Y' = AY$ a ses solutions maximales définies sur $\mathbb{R}$ et la solution prenant une valeur donnée $V_0 \in \mathbb{R}^n$ en $t=0$ est $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ définie par $t \mapsto e^{tA} V_0$, où $V_0 \in \mathbb{R}^n$ et $e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$.

Remarque 44 : En dimension finie, on peut donc exprimer les solutions en fonction des valeurs propres de A.

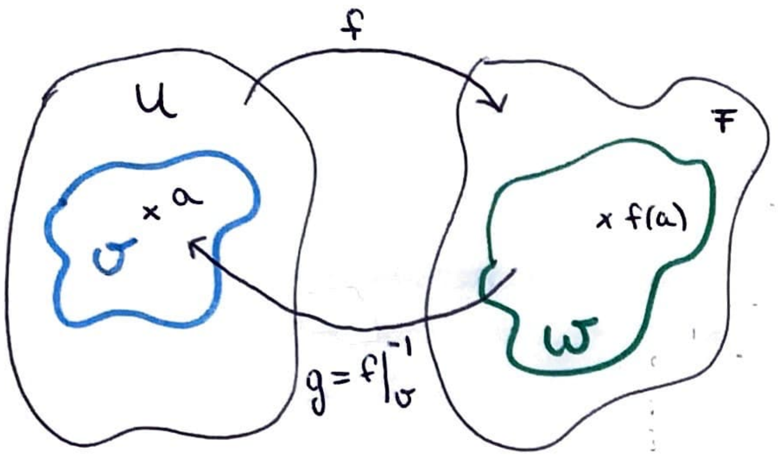
Exemple 45 : Les solutions du système $X' = AX$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ sont de la forme :

$$X(t) = \begin{cases} \alpha e^t + \beta(1+i)e^{it} + \gamma(1-i)e^{-it} \\ \beta e^{it}(1-i) + \gamma e^{-it}(1+i) \\ -2\beta e^{it} - 2\gamma e^{-it} \end{cases}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}.$$

Références :

[GouI] : Les maths en tête, Analyse, X. Gourdon,
[GouG] : Les maths en tête, Algèbre et Probabilités, X. Gourdon,
[BMP] : Objectif Agrégation, Beck, Malick, Peyré
[Rou] : Petit guide de calcul différentiel, F. Rouvière
[Bre] : Analyse fonctionnelle, théorie et applications, H. Brézis

Annexe :



Inversion locale