NOM : CHABAUD Prénom : Ulysse Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : Leçon 206, Théorèmes de point fixe. Exemples et applications.

Autre sujet :

I. Généralités

Définition 1 : Soit E un ensemble et $f : E \to E$. Un point $x \in E$ est dit point fixe de f si $f(x) = x$.

Exemples 2 :
- $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 + x - 1 \end{array}$ possède deux points fixes, 1 et -1.
- Tout ensemble E est l'ensemble des points fixes de id_E.
- $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \exp(x) \end{array}$ est point fixe de $\begin{array}{l} D : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \\ \quad y \mapsto y' \end{array}$

Théorème 3 : (point fixe élémentaire) Si $f : [0,1] \to [0,1]$ est continue, elle admet un point fixe.

II. Point fixe d'une application contractante

Soit (E,d) un espace métrique complet.

Définition 4 : $f : E \to E$ est dite :
- contractante si $\exists\, 0 < K < 1, \forall x, y \in E$, $d(f(x), f(y)) \leq K d(x,y)$
- faiblement contractante si $\forall x \neq y$, $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$

Théorème 5 : (Picard) Si $f : E \to E$ est contractante, alors elle admet un unique point fixe $x^* \in E$ et la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} x_0 \in E \\ x_n = f(x_{n-1}), \forall n \geq 1 \end{cases}$ converge vers x^*.

Corollaire 6 : Le théorème est encore vrai lorsque seule une itérée de f est contractante.

Exemples 7 :
- $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-x^2/4} \end{array}$ admet un unique point fixe dans $\mathbb{R}$.
- $\begin{array}{l} [0,1] \to [0,1] \\ x \mapsto \cos x \end{array}$ également.

Contre-exemples 8 :
- $\begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x + e^{-x} \end{array}$ est faiblement contractante et n'a pas de point fixe.
- $\begin{array}{l}]0,1] \to]0,1] \\ x \mapsto x/2 \end{array}$ est contractante et n'a pas de point fixe, l'espace n'est pas complet.
- $id : E \to E$, E complet n'est pas contractante et possède $|E|$ points fixes.

Théorème 9 : (Inversion locale) Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 et $a \in U$ tel que $\det J_f(a) \neq 0$. Alors il existe un ouvert $U' \subset U$ contenant a et un ouvert V contenant $f(a)$ tels que $f : U' \to V$ soit un difféomorphisme.

Corollaire 10 : (Inversion globale) Soit $f : U \to f(U)$ de classe C^1 injective. Si $\det J_f(a) \neq 0$ pour tout $a \in U$ alors f est un difféomorphisme.

Définition 11 : Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ouvert $\to \mathbb{R}^n$ continue. Une solution au problème de Cauchy (P) $\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ x'(t) = f(t,x) \end{cases}$ avec (t_0, x_0) fixé dans Ω est la donnée d'un intervalle J ouvert de $\mathbb{R}$ et d'une fonction x de classe C^1 définie sur J satisfaisant (P).

Définition 12 : Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ouvert $\to \mathbb{R}^n$. f est dite localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable si $\forall (t_0, x_0) \in \Omega$, il existe un voisinage V de (t_0, x_0) tel que $\exists K > 0, \forall (t,x) \in V, \|f(t_0, x_0) - f(t_0, x)\| \leq K \|x_0 - x\|$.

Réf : · Rouvière.
· Cassini (FGN)
· Pommelet
· Serre

NOM : CHABAUD Prénom : Ulysse Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : 206

Autre sujet :

pas conseillé si on ne connait pas d'exples

DEV1

Théorème 13 : (Cauchy-Lipschitz local). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ continue et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable, $(t_0, x_0) \in \Omega$. (P) admet une solution locale. On a unicité : là où deux solutions coexistent, elle sont égales.

Exemples 14 : $\left.\begin{array}{l} \bullet\ x' = tx \\ \bullet\ x' = e^{-x^2} \\ \bullet\ x' = 3|x|^{2/3} \end{array}\right\}$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

III) Points fixes de Brouwer et de Schauder

DEV2

Théorème 15 : (Brouwer) $n \in \mathbb{N}^*$, soit f continue de B^n dans B^n. Alors f admet un point fixe.

Exemple 16 : $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_n \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \end{array}$ a pour points fixes les $\begin{pmatrix} a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

Contre-exemple 17 : $\ell^1 = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R} \mid \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty\}$, muni de la norme $\|u_n\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

$f : \begin{array}{ccc} \ell^1 & \longrightarrow & \ell^1 \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (1 - \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|, u_0, \dots, u_n, \dots) \end{array}$, f est continue, $f(B(0,1)) \subset B(0,1)$

f n'a pas de point fixe (dimension infinie).

Corollaire 18 : Le théorème reste vrai pour un convexe compact.

Application 19 : (Perron-Frobenius) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est à coefficients positifs, alors $\rho(A)$ est une valeur propre positive associée à un vecteur propre positif.

Théorème 20 : (Schauder) Toute application continue $f : C \to C$, où C est un convexe compact d'un espace de Banach E, admet un point fixe.

IV Application à la résolution d'équations

Théorème 21 : (Point fixe à paramètre) Soit E et F deux espaces normés, E complet et $f : E\times F \to E$ une application continue contractante en la première variable.

Alors : (i) $\forall \lambda \in F, \exists! x_\lambda \in E, f(x_\lambda, \lambda) = x_\lambda$

(ii) $\begin{array}{ccc} F & \to & E \\ \lambda & \mapsto & x_\lambda \end{array}$ est continue

(iii) Si $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^p$, f est C^1 et s'il existe $K < 1$ tel que $\|D_x f(x,\lambda)\| \leq K$ alors $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \to & \mathbb{R}^n \\ \lambda & \mapsto & x_\lambda \end{array}$ est C^1

Exemple 22 : Le système $\left| \begin{array}{l} x = \frac{1}{2}\sin(x+y) + t - 1 \\ y = \frac{1}{2}\cos(x-y) - t + \frac{1}{2} \end{array}\right.$. $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont C^1.

Proposition 23 : (Méthode de Newton). $f : [c,d] \to \mathbb{R}$, C^2, $f(c) < 0 < f(d)$ et $f' > 0$ sur $[c,d]$.

On pose $x_n = F^{[n]}(x_0)$ où $F(t) = t - \frac{f(t)}{f'(t)}$

Alors f admet un unique zéro a et il existe un intervalle $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ stable par F tel que $\forall x_0 \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$, $\exists\, 0 < C < \frac{1}{\varepsilon}$, $C|x_{n+1} - a| \leq (C\varepsilon)^{2n}$

Exemple 24 : L'exemple historique $y = x^3 - 2x - 5$ (1670)

$r \approx 2$, $x = 2 + e$, $e^3 + 6e^2 + 10e - 1 = 0$, $e = 0{,}1$,

$r_1 = 2{,}1 + e_1$, ...

Ulysse CHABAUD

Théorème de Brouwer : Soit $f : B^n \to B^n$ continue, alors elle admet un point fixe.

Démonstration : Comme B^n est compacte, on fixe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall x \in B^n$ $\|f(x) - x\| > \varepsilon$.

Par Weierstrass on fixe $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ polynomiale telle que $\|f - P\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$.

$\forall x \in B^n$, $\|P(x)\| \leq \|P(x) - f(x)\| + \|f(x)\| < \frac{\varepsilon}{2} + 1$

On pose $Q = \dfrac{1}{1 + \varepsilon/2} P$, qui est C^1 et vérifie $Q(B^n) \subset B^n$

$$\forall x \in B^n, \|Q(x) - f(x)\| \leq \|Q(x) - P(x)\| + \|P(x) - f(x)\|$$
$$\leq \left(1 - \frac{1}{1+\varepsilon/2}\right) \|P(x)\| + \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\leq \varepsilon$$

donc $\|Q(x) - x\| \geq \|f(x) - x\| - \|Q(x) - f(x)\| > 0$ et Q n'a pas de point fixe.

Quitte à remplacer f par Q, on peut supposer f C^1.

$$\forall x \in B^n, \quad \varphi(x) = S^{n-1} \cap [f(x), x),$$
$$= f(x) + \mu(x)(f(x) - x)$$

et $\|\varphi(x)\|^2 = 1$ donne $\mu(x) = \dfrac{-\langle f(x) - x, f(x)\rangle + \sqrt{\Delta(x)}}{\|x - f(x)\|^2}$

avec $\Delta(x) = \langle x - f(x), f(x)\rangle^2 + \|x - f(x)\|^2 (1 - \|f(x)\|^2) > 0$

donc μ est C^1 donc φ est C^1 et $\varphi_{|S^{n-1}} = id_{S^{n-1}}$ par construction.

$\forall t \in [0,1]$, on pose $\varphi_t : \begin{array}{l} B^n \to B^n \\ x \mapsto (1-t)x + t\varphi(x) \end{array}$

Soit $t \in [0,1]$, $x, y \in B^n$ tels que $\varphi_t(x) = \varphi_t(y)$, alors $\|x - y\|(1-t) = t\|\varphi(x) - \varphi(y)\|$,

or φ est C^1 donc $\exists M > 0$, $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq M\|x - y\|$,

ainsi $\|x - y\|(1-t) \leq tM\|x - y\|$ ce qui implique $x = y$ pour $t < \alpha = \dfrac{1}{1+M}$.

On suppose $t < \alpha$ dans la suite, φ_t est injective.

$\forall x \in B^n$, $\det J_{\varphi_t}(x)$ est un polynôme en t. Ses coefficients sont continus en x,

donc $\det J_{\varphi_t}(x) = a_n(x)t^n + \cdots + a_1(x)t + \underbrace{1}_{\text{car } \varphi_0 = Id}$

et $m = \sup\limits_{\substack{t \in [0,1] \\ x \in B^n}} |a_n(x)t^{n-1} + \cdots + a_1(x)| < +\infty$

On suppose désormais $t < \beta = \min(\frac{1}{m}, \alpha)$

donc $\forall x \in B^n$, $|a_n(x)t^n + \cdots + a_1(x)t| < 1$, d'où $\det J_{\varphi_t}(x) > 0$

Ainsi $\forall t < \beta$, φ_t est un difféomorphisme de $\mathring{B}^n$ dans $\varphi_t(\mathring{B}^n)$ qui est donc ouvert.

Ulysse CHABAUD

On pose, pour $t \in [0,1]$, $P(t) = \int_{\mathring{B}_n} \det J_{\varphi_t}(x)\, d\lambda(x)$, c'est un polynôme en t.

$\varphi_1 = \varphi$, et $\|\varphi(x)\| = 1 \ \forall x \in B^n$,

donc $\langle \varphi(x), d\varphi_x(h) \rangle = 0 \ \forall x \in B^n, \forall h \in B^n$,

d'où $\forall x \in B^n \ \det J\varphi_1(x) = 0$,

donc $P(1) = 0$.

$\varphi_t|_{S^{n-1}} = id_{S^{n-1}}$ et φ_t est injective pour $t < \beta$,

donc $\varphi_t(\mathring{B}^n) \subset \mathring{B}^n$, et avec ce qui précède $\varphi_t(\mathring{B}^n)$ est ouvert.

Soit $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\varphi_t(\mathring{B}^n)$ qui converge dans $\mathring{B}^n$ vers y.

$\forall k \in \mathbb{N}\ \exists x_k \in \mathring{B}^n$, $y_k = \varphi_t(x_k)$, alors par compacité de B^n on choisit une extraction ψ et $x_{\psi(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} x \in B^n$; par continuité de φ_t on obtient $y = \varphi_t(x)$

or $y \in \mathring{B}^n$ donc par injectivité de φ_t $x \notin S^{n-1}$, donc $y \in \varphi_t(\mathring{B}^n)$,

donc $\varphi_t(\mathring{B}^n)$ est fermé dans $\mathring{B}^n$ et finalement par connexité de $\mathring{B}^n$, $\varphi_t(\mathring{B}^n) = \mathring{B}^n$

Enfin, $\forall t < \beta$, $P(t) = \int_{\mathring{B}^n} \det J_{\varphi_t}(x)\, d\lambda(x)$

$= \int_{\mathring{B}^n} |\det J_{\varphi(t)}(x)|\, d\lambda(x)$

$= \int_{\mathring{B}^n} d\lambda(x) = \lambda(\mathring{B}^n)$, or P est un polynôme donc il est constant mais alors $\lambda(\mathring{B}^n) = 0$, absurde.

changement de variable

Ulysse Chabaud

<u>Unicité</u> : Soient (J_1, x_1), (J_2, x_2) deux solutions locales de (P).

On pose $A = \{ t \in J_1 \cap J_2 \mid x_1(t) = x_2(t) \}$. $t_0 \in A$ donc $A \neq \emptyset$.

$y = x_{1|J_1 \cap J_2} - x_{2|J_1 \cap J_2}$ est continue donc $A = y^{-1}(\{0\})$ est fermé.

Soit $\tau \in A$, $x_1(\tau) = x_2(\tau)$.

f étant localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, $\exists h, K > 0$,
$\forall t \in]\tau - h, \tau + h[$,
$\| f(t, x_1(t)) - f(t, x_2(t)) \| \leq K \| x_1(t) - x_2(t) \|$

Alors $\forall t \in]\tau - h, \tau + h[$,

$$\| x_1(t) - x_2(t) \| = \left\| \int_\tau^t (x_1'(s) - x_2'(s))\, ds \right\|$$
$$= \left\| \int_\tau^t (f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s)))\, ds \right\| \leq \int_\tau^t \| f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s)) \|\, ds$$
$$\leq K \int_\tau^t \| x_1(s) - x_2(s) \|\, ds$$

donc par Gronwall $\| x_1(t) - x_2(t) \| \leq 0$
$= 0$, donc A est ouvert.

Finalement $A = J_1 \cap J_2$ car $J_1 \cap J_2$ est un ouvert connexe,
d'où l'unicité.

- <u>Q</u> $\cap$ de 2 connexes = connexe ?
  ↳ non mais $\cap$ de 2 int ou pt en commun = interval $\Rightarrow$ connexe

- <u>Gronwall</u> : v, α, σ $\sigma \geq 0$.
  $v(t) \leq \alpha(t_0) + L \int_{t_0}^{t} v(s)\sigma(s)\, ds$, $v(t) \leq \alpha(t_0) \exp \int \sigma$

- <u>Q</u> Besoin de Gronwall alors que Picard donne déjà unicité du pt fixe ?

- Démo Fausse

  T dpd vraimt pas de h ??

  On n'utilise pas le fait que équa. diff

  y sol° $\boxed{\text{TAF}}$

  ↳ permet de dire que les sol° ∃ un tps $< {}^{r}/_{M}$ alors elles ne sortent pas de $\overline{B}(x_0, r)$

Leçon 206, Développement 1

Ulysse Chabaud

Théorème : (Cauchy-Lipschitz local)
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ ouvert, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ continue et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable.
$(t_0, x_0) \in \Omega$ fixés, le problème de Cauchy $(P) = \begin{cases} x'(t) = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ admet une solution locale (J, x). On a de plus unicité : là où deux solutions sont définies, elles sont égales.

Démonstration : Existence : Soit $h, r > 0$ avec $[t_0-h, t_0+h] \times \overline{B(x_0, r)} \subset \Omega$ et f K-lipschitzienne par rapport à la seconde variable sur cet ensemble, $K > 0$.

On pose $F_h = \left\{ x : [t_0-h, t_0+h] \longrightarrow \overline{B(x_0,r)} \;\middle|\; \begin{matrix} x \text{ continue} \\ \text{et} \\ x(t_0) = x_0 \end{matrix} \right\}$

et $\varphi_h : F_h \longrightarrow \left\{ x : [t_0-h, t_0+h] \longrightarrow \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{matrix} x \text{ continue} \\ \text{et} \\ x(t_0) = x_0 \end{matrix} \right\}$

$$x \longmapsto \left(t \longmapsto x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,ds \right)$$

Remarque : Si $\varphi_h(x) = x$ pour $x \in F_h$, alors $(]t_0-h, t_0+h[, x)$ est solution locale de (P).
Montrons donc qu'il existe h tel que φ_h admet un point fixe.

norme uniforme

F_h muni de la distance $d : \forall x_1, x_2 \in F,\ d(x_1, x_2) = \sup_{t \in [t_0-h, t_0+h]} \|x_1(t) - x_2(t)\|$ est complet car $\overline{B(x_0,r)}$ complet pr cette norme

Reste à choisir h pour que φ_h soit à valeurs dans F_h et contractante. ~~FAUX~~ dpd a priori de h (F_h) mais pour $h' < h$, F_h convient ds.

Soient $x \in F_h$ et $t \in [t_0-h, t_0+h]$,
$\|\varphi(x)(t) - x_0\| \leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, x(s))\|\,ds$, or f est continue sur Ω donc bornée par $M > 0$ sur $[t_0-h, t_0+h] \times \overline{B(x_0,r)}$ (et donc a fortiori sur $[t_0-h', t_0+h'] \times \overline{B(x_0,r)}$ pour $0 < h' < h$)
alors $\underline{\|\varphi(x)(t) - x_0\| \leq Mh}$, on veut donc $Mh' < r$, $h' < \frac{r}{M}$

Soient $x_1, x_2 \in F$ et $t \in [t_0-h, t_0+h]$
$$\|\varphi(x_1)(t) - \varphi(x_2)(t)\| \leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))\|\,ds$$
$\underline{\leq Kh}$ car f est lipschitzienne par hypothèse.

Ainsi le choix de $0 < h' < \min\left(\frac{r}{M}, \frac{1}{2K}, h\right)$ assure que $\varphi_{h'}$ est $1/2$-contractante et à valeur dans F complet,
donc d'après le théorème de Picard $\varphi_{h'}$ admet un point fixe d'où l'existence d'une solution locale de (P).

Leçon 206 : Théorèmes de pts fixes. Exples et applica°

I) Questions

- $\neq$ce Picard, Brouwer et Schauder ↳ Brouwer ⟹ ~~unicité~~
  $\neq$ce Cauchy-Lipschitz vs Cauchy Peano
  ↳ Cauchy-Peano ⟹ ~~unicité~~ même locale (exple ?)
  et se démontre av Brouwer et par Picard
- thm 3 intuitif et élém. Dém ?
  ↳ TVI à $f(x)-x$
  intuitif mais pas élémentaire
- Rajouter une hyp pr qu'une fonc° faiblemt contr. ait un pt fixe ?
  ↳ Rajouter E compact
  IF suit le résultat & les itérés
- Corollaire 6. Déjà utilisé ?
  ↳ Rajouter des ex
  Corollaire vrai m̂ à suppose pas f C^0 ?
- thm 9 (inversion locale). Dém av thm de pt fixe ?
  Difféomorf obtenu : de quelle classe ?
  Applica° ?
  ↳ Brouwer (← thm d'inv. globale ← cor du thm d'inv loc.)
  ts d'un difféo C^1 (pour le chgt de variable)
- thm de Perron-Frobenius (appli 13) ici version faible.
  Quelle serait la version forte ?
  Cmt on démontre la version faible ?
- Exple où on peut appliquer Schauder ms pas Brouwer ?
- Pquoi Cauchy-Peano sort du cadre de la leçon ?
- Pt fixe à param. : qu'en des espaces normés ?
  Si E métrique complet, F qque, tjs vrai ? ↳ oui
  Et à quoi ça pourrait servir ? Dém ?

II. Remarques

- Avoir conscience que ce sont des maths difficiles
  Règle n°1 : maîtriser tt ce dt on parle
- Démontrer C local ⇒ C global = attention
- Proposi° de plan :
  1. Picard + appli. Cauchy Lipschitz
  2. Version à paramètres + appli. thm d'inv locale
- Sous famille de Perron-F = excellent applica° de Brouwer
  Mais il faut avoir une démo locale
  Il faut prendre $S = \{x_i \geq 0, \sum x_i = 1\}$ homéomorphe à une boule mais de $\mathbb{R}^{n-1}$!! (← Carathéodory)
- Si on ne connait pas de compact convexe en dim ∞ ⇒ ~~Schauder~~

III. Conseils

- Cœur de la leçon = Picard
  || $f : X \circlearrowleft$ Complet k-contractante ⇒ $\exists ! \, x = \lim f^n(x_0)$, $f(x) = x$.
  C-ex qd $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$: $x \mapsto x + e^{-x}$ $\mathbb{R}^+ \circlearrowleft$
  Mais si dans un compact : $\exists ! x, f(x) = x$ min $(d(x, f(x)))$
  (← fonc° c° s/ un compact atteint ses bornes !) sinon $d(f(x), f(f(x)))$
- Cauchy-Lipschitz $x' = f(t, x)$, f déf s/ un ouvert de $\mathbb{R} \times E$
  (t_0, x_0). $\exists \alpha > 0$ et une solu° déf s/ $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ à Cauchy
  $\varphi(t_0) = x_0$.
  ⚠ Ça ne dit pas que φ est unique (c'est vrai ms trop faible : il pourrait y avoir $\alpha' < \alpha$ et φ' sol° s/ $[t_0 - \alpha', t_0 + \alpha']$ qui ne se prolongerait pas).
  Unicité locale = $\forall J \subset [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ et ψ sol° sur J / $\psi(t_0) = x_0$, alors $\psi = \varphi|_J$

Dém : Considérer l'équ° int et appliquer pt fixe

Difficulté = quels espace de fonc° considérer ?

f sur (t_0, x_0) C^0 $\exists\, \alpha_0, r$ / f bornée par M sur

$[t_0 - \alpha_0, t_0 + \alpha_0] \times \bar{B}(x_0, r) \subset U$

$\alpha = \min(\alpha_0, k/2, r/M)$.

$\forall J \ni t_0 \subset [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$

Lemme : $\varphi(t_0) = x_0$, φ sol° déf sur J alors $\forall t \in J$,

$\varphi(t) \in BF(x_0, r)$

Dém $\|\varphi'(t)\| = \|f(t, \varphi(t))\| \leq M$ tant que ds la boule

Mq on ne peut pas sortir de la boule. On suppose qu'on sort en τ (1ère fois). Avt τ : $\leq M$

On peut appliquer le TAF $\Rightarrow \tau \geq r/M$.

Ensuite point fixe $C^0(J, BF(x_0, r)) \circlearrowleft$ 1/2 contr. ($\leq k/2$)

Unicité vient directement de Picard car on l'a appliqué pour $\forall J$ inclus dans ...

(on peut prendre $\varphi_{|J}$, c'est l'unique)

Unicité globale : on prend l'ensemble des pts où les fonc° prennent la m valeur = fermé. Et ... $\Rightarrow$ ouvert

- Thm du pt fixe à param. Hyp. X métrique complet f C^0 $T \times X \to X$ k-contractante. $\exists k < 1, \forall t, x, y$ $d(f(t,x), f(t,y)) \leq k\, d(x,y)$. ne dépd pas de t !!

$f_t : X \circlearrowleft$ pt fixe x_t. $t \mapsto x_t$ C^0

- Appli : TIL (thm inversion locale) f $C^1 : U \to F$ $a \in U$. $Df(a) \in \mathcal{L}(E,F)$ inv. Alors $\exists\, a \in V \subset U$ et W ouvert de $F \ni f(a)$, $f_{|V}$ est un C^1 difféo $V \to W$

Difficulté : trouver un homéo local

Injectivité : TAF, pas difficile

Surjectivité : composer par $Df(a)^{-1}$, se ramener au $E = F$, $Df(a) = Id$