157

Endomorphismes trigonalisables, endomorphismes nilpotents.

Soit E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ (avec $\mathbb{K}$ un corps), $u, v \in \mathcal{L}(E)$, $P \in \mathbb{K}[X]$. $\chi_u := \det(u - X\,id) \in \mathbb{K}[X]$, $F \subset E$ un sous-espace vectoriel.

I Endomorphismes trigonalisables

1 Polynômes d'endomorphismes

Définition 1 : Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$, on définit ; $P(u) \in \mathcal{L}(E)$, tel que : $P(u) = \sum_{k=0}^{m} a_k u^k$, où $u^0 = Id_E$; et pour tout $k \in \mathbb{N}$, u^k désigne la k-ième itérée de u.

Proposition 2 : L'application $\varphi_u : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathcal{L}(E)$, $P \longmapsto P(u)$ est un morphisme d'algèbres, et on note $\mathbb{K}[u] := \mathrm{Im}(\varphi_u)$, l'algèbre commutative des polynômes d'endomorphismes.

Définition 3 : P est dit annulateur de u si $P(u) = 0$.
- $I_u := \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u) = 0\}$ est appelé idéal annulateur de u, et engendré par un unique polynôme $\Pi_u \in \mathbb{K}[X]$ appelé polynôme minimal de u.

Proposition 4 : Si $\lambda \in sp(u)$, et $P \in I_u$, alors $P(\lambda) = 0$.

Théorème 5 | Lemme des noyaux.

Si $P = P_1 \cdots P_N \in \mathbb{K}[X]$, $P_i \in \mathbb{K}[X]$ ($i \in \{1, \dots, N\}$), est tel que les P_i sont deux à deux premiers entre eux, alors :

$$\ker P(u) = \bigoplus_{i=1}^{N} \ker P_i(u)$$

2. Trigonalisation

Définition 6 : u est dit trigonalisable, s'il existe une base de E, $\mathcal{B}$, telle que $\mathrm{Mat}(u)_{\mathcal{B}}$ soit triangulaire supérieure.

Théorème 7 | Caractérisation 1.

On a équivalence entre :
1) u est trigonalisable
2) χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$.

Exemple 8 : $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ est trigonalisable car $\chi_M = -(X-3)(X-2)^2$.

Corollaire 8 : Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, u est toujours trigonalisable.

Application 9
- Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Alors $\det(\exp A) = \exp(tr(A))$
- Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $M = \exp(N)$, $N \in M_n(\mathbb{R})$. Alors $\det(M) > 0$: La matrice $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ montre que la réciproque est fausse.

Proposition 10 : On a $\Pi_u^{-1}\{0\} = sp_{\mathbb{K}}(u)$.

Théorème 11 | Caractérisation 2

On a équivalence entre.
1) u trigonalisable
2) Π_u est scindé sur $\mathbb{K}$.
3) Il existe $P \in \mathbb{K}[X]$, scindé sur $\mathbb{K}$, $P \in I_u$.

Corollaire 12 : Si F est stable par u, et que u est trigonalisable, alors $u_{|F} \in \mathcal{L}(F)$ est trigonalisable.

Théorème 13 | Trigonalisation simultanée.

Si u et v commutent et sont trigonalisables, ils sont trigonalisables dans une même base.

3. Un peu de topologie.

Application 14 : Soit $D_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{C})$. Alors $\overline{D_n(\mathbb{C})} = M_n(\mathbb{C})$.
La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ montre que c'est faux dans $M_n(\mathbb{R})$.

Application 15	Cayley-Hamilton complexe.

Si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, on retrouve que $\chi_u \in I_u$.

<u>Proposition 16</u> : Soit $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices trigonalisables sur $\mathbb{R}$. Alors $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ est un fermé, et $\overline{D_n(\mathbb{R})} = \mathcal{T}_n(\mathbb{R})$

<u>Proposition 17</u> : On suppose $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. Alors u est diagonalisable si et seulement si $\mathcal{O}(u)=\{gug^{-1} \mid g\in GL(E)\}$ est fermé.

II. Endomorphismes nilpotents.

1. Caractérisations : une question de corps ?

<u>Définition 18</u> : u est dit nilpotent s'il existe $p\in\mathbb{N}^*$ tel que $u^p=0$. $q=\min\{p\in\mathbb{N}^* \mid u^p=0\}$ est l'indice de nilpotence.

<u>Proposition 19</u> : Si u est nilpotent, alors $0\in sp_{\mathbb{K}}(u)$, et $tr(u)=0$.

<u>Théorème 20</u> : On suppose $\mathbb{K}$ algébriquement clos. u est alors nilpotent si et seulement si $sp_{\mathbb{K}}(u)=\{0\}$.

<u>Contre-exemple 21</u> : Dans $\mathbb{R}$, $A_\theta=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\cos(\theta)&-\sin(\theta)\\0&\sin(\theta)&\cos(\theta)\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$, $\theta\notin\pi\mathbb{Z}$.
On a $sp(A_\theta)=\{0\}$, et A_θ non nilpotente.

<u>Théorème 22</u> : Pour $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle, on a u nilpotent, si et seulement si pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $tr(u^k)=0$

<u>Proposition 23</u> : Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, on a équivalence entre :
1) u nilpotent
2) $\chi_u=(-1)^n X^n$
3) $u^n=0$.

<u>Exemple 24</u> : La matrice $J_n:=\begin{pmatrix}0&1&&(0)\\&\ddots&\ddots&\\&&&1\\(0)&&&0\end{pmatrix}\in M_n(\mathbb{K})$ est nilpotente d'indice n.

2. Réduction des endomorphismes nilpotents

<u>Définition 25</u> : On dit que F est un sous-espace cyclique, s'il existe $x\in E\setminus\{0\}$, tel que $B=\{x;u(x),\dots,u^p(x)\}$ soit une base de F, pour un certain $p\in\mathbb{N}^*$.

<u>Lemme 26 (I)</u> : Si u est nilpotent, il existe un sous-espace cyclique F, stable par u

<u>Lemme 27 (II)</u> Si u est nilpotent, il existe un sous-espace cyclique G de E^*, stable par ${}^t u\in\mathcal{L}(E^*)$

<u>Lemme 28 (III)</u>. Avec les notations de I et II, $F\oplus G^\circ=E$, et G° stable par u.

Théorème 29	Développement 1 (I, II, III inclus)

Si u est nilpotent, il existe une base B de E, telle que $B=\bigcup_{i=1} B_i$, telle que $F_i=\mathrm{vect}(B_i)$ soit cyclique stable par u, et $\mathrm{Mat}(u_{F_i})=\begin{pmatrix}0&1&\\&\ddots&1\\&&0\end{pmatrix}\in M_{q_i}(\mathbb{K})$ où $q_i=\dim(F_i)$.

<u>Remarque 30</u> : Ainsi, si u est nilpotent, sa matrice dans une certaine base est diagonale par blocs.

3. Topologie et dénombrement.

On considère l'action de $GL_n(\mathbb{K})$ par similitude sur $M_n(\mathbb{K})$.
On note pour $M\in M_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{O}rb(M)$ sa classe de similitude (orbite de M), et $\mathrm{stab}(M)$ son stabilisateur dans $GL_n(\mathbb{K})$.
$\mathcal{N}_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices nilpotentes d'indice exactement $n\in\mathbb{N}^*$.

Proposition 31 : Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$. Alors M est nilpotente si et seulement si $0_{M_n(\mathbb{C})} \in \overline{Orb(M)}$

Lemme 32. Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X, et $x \in X$. Alors $\# G = \#(Orb(x)) \times \#(Stab(x))$.

Lemme 33 : (I) $J_n \in \mathcal{N}_n(\mathbb{K})$; et $Orb(J) = \mathcal{N}_n(\mathbb{K})$.

(II) $Stab(J) = GL_n(\mathbb{K}) \cap \mathbb{K}[J]$.

Théorème 34 | Dénombrement de $\mathcal{N}_n(\mathbb{K})$ | Développement 2 (I–II)

Si $\# \mathbb{K} = q \in \mathbb{N}^*$ ($\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$), on a :

$$\# \mathcal{N}_n(\mathbb{K}) = \prod_{k=1}^{n-1} (q^n - q^{k-1})$$

III Application à la réduction

1. Réduction de Dunford

Définition 35 : Si $\chi_u = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$, on appelle sous-espace caractéristique associé à λ_i, le sous-espace $N_i = \ker(u - \lambda_i id)^{\alpha_i}$

Proposition 36 : Avec les notations de 35, on a : pour tout $i \in [\![1, r]\!]$

1) N_i est stable par u,

2) $E = \bigoplus_{i=1}^{r} N_i$

3) $\dim N_i = \alpha_i$, $\forall i$.

Proposition 37 Soit $P = M_1^{\alpha_1} \dots M_s^{\alpha_s} \in \mathbb{K}[X] \cap I_u$, où P est décomposé en irréductibles. Soit p_i la projection sur $N_i = M_i^{\alpha_i}$, parallèlement à $\bigoplus_{j=1, j \neq i}^{s} N_j$. Alors $p_j \in \mathbb{K}[u]$.

Théorème 38 | Décomposition de Dunford

Si χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$, il existe un unique couple $(n, d) \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

1) d diagonalisable, n nilpotente.

2) $u = n + d$

3) $nd = dn$.

4) $n, d \in \mathbb{K}[u]$

Application 39 : On suppose χ_u scindé. Alors :

$$\exp(u) = \exp(d)\exp(n) = \sum_{i=1}^{s} e^{\lambda_i} \left[\sum_{p=0}^{r_i - 1} \frac{(u - \lambda_i Id)^p}{p!} \right] p_i$$

2. Décomposition de Jordan

Théorème 40 | Jordan.

Si χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$, il existe une base B de E telle que $Mat(u)_B = diag(A_1, \dots, A_r)$, où pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix} \in M_{\alpha_i}(\mathbb{K})$, où $\lambda_i \in sp_{\mathbb{K}}(u)$ et α_i sa multiplicité dans χ_u

Application 41 : Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$. Alors M est nilpotente si et seulement si $2M \in Orb(M)$.

Application 42 : Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$. Alors M et ${}^tM$ sont semblables.

Références :
- Gourdon algèbre
- Algèbre et géométrie. Rombaldi
- Hmeimé, Mansuy : Algèbre linéaire.
- Algèbre et géométrie : Mernier