

Perrin (Isam) dtd.
Audin (Cécile)
Cet ouvrage ...

Jury :

Prénom :

NOM :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi :

127

Autre sujet :

Droite Projective
et birapport.

Soit K un corps

I - Droite Projective $IP^1(K)$

1. Construction de la droite projective $IP^1(K)$

Def 1 La droite projective $IP^1(K)$ est l'ensemble des droites vectorielles de K^2 . C'est le quotient $K^2 \setminus \{0\} / \sim$ où $(x, y) \sim (x', y')$ si on a $\lambda \in K^* \text{ tel que } (x', y') = \lambda(x, y)$.
Si $(x, y) \in K^2 \setminus \{0\}$, on note $[x, y]$ son image dans $IP^1(K)$ et p la projection canonique.

Prop 2 $\forall (x, y) \in K^2 \setminus \{0\}$, (x, y) ne se prend que de la $[x, y]$, on définit alors $\pi : K \rightarrow IP^1(K)$
 $t \mapsto [t, 1]$

Alors $IP^1(K) = \pi(K) \cup [1, 0]$
On note ce dernier élément ∞ et on s'appelle le point à l'infini. On identifie de plus K et $\pi(K)$

Rem 3 Le choix du point à l'infini est, quitte à changer π , arbitraire.
 $\in K \cup \{\infty\}$ si $\infty = [0, 1]$, on peut prendre $\pi(t) = [t, 1]$

2. Topologie $C(K) = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Def 5 On munit $IP^1(K)$ de la topologie quotient
New 6 $IP^1(\mathbb{R}) = S^1 / x \sim -x$

Théorème 7 $IP^1(\mathbb{R})$ est homéomorphe à S^1 .
 $IP^1(\mathbb{C})$ est homéomorphe à S^2 .
Les deux sont compacts.

II - Homographies et birapport

1. Homographies

Def 8 Une homographie $g : IP^1(K) \rightarrow IP^1(K)$ est une application telle qu'il existe $p \in GL_2(K)$ avec $g \circ p = g \circ p$

Rem 9 $f \in GL_2(K)$ ne définit pas forcément une homographie

Théorème 10 Les homographies $g : IP^1(K) \rightarrow IP^1(K)$ forment un groupe muni de $GL_2(K)$
 $\Phi : GL_2(K) \rightarrow GL_2(K)$
 $f \mapsto p \circ f$ est un morphisme de groupe surjectif de noyau $\lambda Id, \lambda \in K^*$.

Der. On s'identifie $GL_2(K)$ à $PGL_2(K)$, le groupe projectif linéaire.
Notation 11 Si $f \in GL_2(K)$ alors dans la base canonique, $f(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ avec $ad - bc \neq 0$.

Si on fait l'identification $IP^1(K)$ $= K \cup \{\infty\}$ on a $\pi \circ \pi^{-1}(x, y) = [x, y, 1]$
 $\circ [1, 0] = \infty$
 $= x/y$

Alors l'homographie $\Phi(f)$ est $\Phi(f)(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ avec les conventions $\circ \infty = a/c$
 $\circ h(-d/c) = \infty$

Prop 12 Les points fixes d'une homographie ont des images par P des vecteurs propres d'une application linéaire associée; il y en a donc 0, 1 ou 2.

App 13 Si $\delta \in PGL_2(\mathbb{C})$, δ a au moins un point fixe.

Ex 13 Si $h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ n'a pas de point fixe.

Prop 15 Si $h \in GL_2(\mathbb{C})$, une homographie est une homomorphisme.

Théorème 16 L'action de $PGL_2(\mathbb{C})$ sur $IP^1(\mathbb{C})$ est trois fois simplement transitive.

Prop 17 Un repère de $IP^1(\mathbb{C})$ est un triplet de points distincts. Un changement de repère est une homographie.

2- Binoport

Def 18 Soient z_1, z_2, z_3, z_4 quatre points distincts de $IP^1(\mathbb{C})$ et $h \in PGL_2(\mathbb{C})$ défini par $h(z_1), h(z_2), h(z_3) = (\infty, 0, 1)$ alors $h(z_4)$ est le binoport $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ de quadruplet (z_1, z_2, z_3, z_4) .

Théorème 19 Le binoport est invariant par homographie. $[z_1, z_2, z_3, z_4] = [z_1', z_2', z_3', z_4']$ si et seulement si il existe $h \in PGL_2(\mathbb{C})$ tel que $\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$, $h(z_i) = z_i'$.

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \times \frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1}$$

Prop 20 Si z_1, z_2, z_3 sont distincts fixes, alors $z \mapsto [z, z_1, z_2, z_3]$ est une homographie.

3- Binoport dans $IP^1(\mathbb{C})$ - cercle

Théorème 21 Quatre points de $\mathbb{C}$ sont cocycliques si et seulement si leur binoport, calculé dans $IP^1(\mathbb{C})$ est réel.

car 22 Une homographie envoie un cercle ou une droite sur un cercle ou une droite.

Ex 23 $[1, i, -1, -i] = 2 \in \mathbb{R}$,

Ex 24 Si $h(z) = \frac{1}{z-1}$, alors $\exists$ image par h du cercle unité et la droite d'équation $Re z = 1/2$.

Théorème 25 (Formule de Möbius binoport)

Pour a, b, c, d, r, q, r, s distincts on a $[a, b, c, d] [c, a, d, b] [d, a, b, c] [b, c, d, a] [a, b, c, d] [c, a, d, b] = 1$.

App 26 Soient e_1, e_2, e_3, e_4 quatre cercles avec $e_1 \cap e_2 = \{A, B\}$, $e_2 \cap e_3 = \{B, C\}$, $e_3 \cap e_4 = \{C, D\}$, $e_4 \cap e_1 = \{D, A\}$.

Alors A, B, C, D sont alignés ou cocycliques ou A, B, C, D sont alignés.

App 27 Soit ABC un triangle et $B' \in BA, C' \in AC, A' \in BC$. Alors les cercles circonscrits à $ABC, A'B'C'$ et ABC ont un point commun.

4. Bireport dans $P(E)$

Def 28 Soit E un k -espace vectoriel, alors $P(E)$ est l'ensemble des droites vectorielles de E . On note la projection $p: E \setminus \{0\} \rightarrow P(E)$

Une droite projective est l'image d'une droite vectorielle (épointée) de E par p .

Une homographie $h: D \rightarrow D'$ envoie deux droites vectorielles projectives en projection quaternaire un isomorphisme $\pi^{-1}(D) \cup \{0\} \rightarrow \pi^{-1}(D') \cup \{0\}$

Soient $a, b, c, d \in D$ une droite projective, il existe une unique homographie $h: D \rightarrow P^1(k)$ telle que $(h(a), h(b), h(c)) = (\infty, 0, 1)$. On définit $[a, b, c, d] = h(d)$ le bireport des quatre points.

Def 29 Un pinceau est l'ensemble des droites passant par un point $p \in P(E)$. On le note p^*

Prop - Def 30 Soient $a_1, a_2, a_3, a_4 \in p^*$ et d, d' deux droites qui les coupent toutes 4 en respectivement m_1 et m_1' , $i \in \{1, 2, 3, 4\}$

Alors $[m_1, m_2, m_3, m_4] = [m_1', m_2', m_3', m_4']$, on note cette quantité $[a_1, a_2, a_3, a_4]$

Prop 31 Si $\dim E = 3$, P^2 est une droite projective

Prop 32 Soit $p \in P^2(P^3)$ et p la projection - c'est centrale de centre par la droite d^* : $p(m) = (mp) \cap d^*$

Soit alors d une droite et $m_1, m_2, m_3, m_4 \in d$, alors

$$[p(m_1), p(m_2), p(m_3), p(m_4)] = [m_1, m_2, m_3, m_4]$$

III - Applications

1. distance d'Herbert

Def 33 Soit C un ouvert convexe de $\mathbb{R}^2$ ne contenant pas de droite, et $x, y \in C$ alors on définit $d(x, y)$ ainsi: (x, y) est une corde de C et g_0 est telle que

les points distincts x_0 et y_0 de cette corde qui sont alignés dans la droite x_0, x, y, y_0 alors $d(x, y) = \frac{xx_0}{x_0y_0}$. Et $d(x, x) = 0$

Théorème 34 (C, d) est un espace métrique

Ex 35 Si $C = B(0, 1)$, c'est un modèle de la géométrie hyperbolique

2. Automorphisme de $P^1(k)$

Théorème 38 $PGL_2(k) \rightarrow \text{Aut}(P^1(k))$
 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (z \mapsto \frac{az+b}{cz+d})$

est un morphisme de groupe multiplicatif moyen $k^* \cdot \text{Id}$. Donc $PGL_2(k) \cong \text{Aut}(P^1(k))$

3. Isomorphismes exceptionnels

Prop 39 i) $|P^1(k)| = q+1$ ii) $|GL_n(k)| = q^{\frac{n(n-1)}{2}}$

iii) $|PGL_n(k)| = q^{\frac{n(n-1)}{2}}$ iv) $|SL_n(k)| = |PGL_n(k)|$

Théorème 39

i) $PGL_2(k) = PSL_2(k)$ ii) $GL_2(k) \cong S_3$

iii) $PSL_2(k) \cong S_4$ iv) $PSL_2(k) \cong A_5$

v) $PSL_2(k) \cong A_6$ vi) $PSL_2(k) \cong A_7$

Combinatoire
d'une
mémoire

[2] 1 Bq, bcp de subtilité.

[Caldero, chapitre]

• $d(x,y) = \ln [x, x_0, y_0, y] = \ln \left(\frac{y_0 - x}{y_0 - y} \times \frac{x_0 - y}{x_0 - x} \right)$ Un peu long.

Qu'il a prendre un bon repère en fait le birapport va être $\frac{y_0 x}{y_0 y} \times \frac{x_0 y}{x_0 x}$

Grâce à l'ordre des pts: $\frac{y_0 x}{y_0 y} > 1$ et $\frac{x_0 y}{x_0 x} > 1$

$\hookrightarrow (x_0, x, y_0, y) > 1$ donc $d(x,y) > 0$ ($x \neq y$)

• $d(y,x) = \ln \left(\frac{x_0 - y}{x_0 - x} \times \frac{y_0 - x}{y_0 - y} \right) = d(x,y)$

• Ineq triangulaire à restreindre le due à ce pt?

* On suppose x, y, z non alignés

On construit x_0, y_0, x_1, z_1 et y_1, z_2

Soit $\omega = (y_2, z_1) \cap (x_0, z_2)$

$x' = (xy) \cap (x_1, z_2)$

$y' = (xy) \cap (y_2, z_1)$

Soit φ la proj. centrale de centre ω et de dte (xy)

Lemme géom: $\begin{cases} x' \in]x_0, x[\\ y' \in]y_0, y[\end{cases}$

[...] * x, y, z alignés: calcul explicite

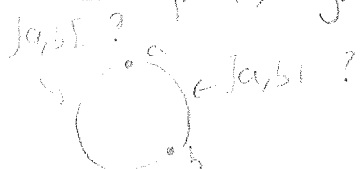
Commentaires: - On écrit des inégalités $[x, y, y_0, x_0] \leq [x, y, y_1, x_1]$
(notations) On fait le chx d'une identification (et de d'un ordre). Expliquer cette identification

- On utilise la projection centrale φ , bien expliciter l'image des pts, de dte, ...

- Et si (x_1, z_2) et (y_2, z_1) ne s'intersectent pas? Que devient ω ? et la projec^o?

L'image d'un cxe par une homographie n'est un cxe? $\leftarrow$ a priori non

- Un exple de no^o qui n'est pas proj: si on retire une dte de $(\mathbb{R}^2)$, séparé l'on espère, eg. en proj on ne peut pas parler du segment $]a, b[$:



Questions plan

- Ex 10 Qu'est ce veut dire identifier? La m chose de quel cas?

↳ par le morph Φ passé au quotient

- Thm 7 $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ et $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sont compacts. Pourquoi?

↳ homéomorphes à S^1 et S^2

Pourquoi?

Un espace compact quotienté par qqch est compact?

↳ Oui si la projection est continue et les espaces sont séparés.

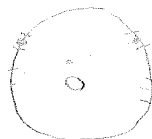
Pourquoi les espaces sont séparés? (ici)

$$S^1 \times S^1 = X$$

$$x, y \in Y, x \neq y.$$

$$\downarrow \pi$$

$$S^1_{x \sim x} = Y$$



Il faut prendre des courbes
suffisamment ptes pr pas
que les sym. var plus
se rencontrent

$\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

* Adapter le cas $\mathbb{R}$? Sphère de $\mathbb{R}^4 = S^3 = \{ |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1 \}$

Bonne façon de faire: les 2 pts on les met ds la m même carte affine (ie les 2
par projection continue $\rightarrow$ on se ramène au cas $\mathbb{R}^n / \mathbb{C}^n$ (ie les 2
pr montrer la séparat°

- Ex 14 $\mathbb{C}P^1$ homéomorphe n'a pas de pt fixe.

↳ Elle en a un: 1.

on dit $\mathbb{R}$ ds le
proj cplx

- Thm 21 Que veut dire coalgébrique au algèbre?

↳ Identifie $\mathbb{C}$ ar $\mathbb{R}^2$ et on prend ces notions ds $\mathbb{R}^2$

Com tu l'expliquerais?

↳ Cercles & droites c'est la même chose.

à mettre ds le plan

Formule pr la projection stéréographique?

Dem du thm?

↳ calcul par disjonc° de cas

Est-ce que le lien rapport chpt du corps de base?

↳ Non $\rightarrow$ preuve + facile du thm 21 ($\Rightarrow$ le mettre après ds le plan)

- Exple 35. Et quoi le dogme hyperbolique? $\Leftarrow$ Ne pas en parler (pour des raisons historiques).

Exercices

- $a, b, c, d \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$, $[b, a, c, d]$ en fonction de $[a, b, c, d]$? $\hookrightarrow$ inverse
 $[b, c, a, d]$ ----- $[a, b, c, d]$?

$\hookrightarrow$ birapport: inverse

éléb birapport: rien

3-cycle: 1-

} $\rightarrow$ à mettre ds le plan!!
 action de S_4 sur $\{\mathbb{P}^1(\mathbb{K})\}^4$

- $a, b, c, d, c', d' \in D$ distincts. $\Downarrow$ $[a, b, c, c'] = [a, b, d, d']$
 $\Downarrow$
 $[a, b, c, d] = [a, b, c', d']$

Commentaires

- Rajouter la projection stéréographique or des fmes et des dmnrs
- Thm 36: doit raisonnable (va de séries formelles)
- 2 approches pr la lgen:
 - * rester sur des dtes (comme ds le titre) Des fois ça limite un peu.
 - * On met dtes proj et birapport ensemble car $\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) = \text{esp. d'arrivée du birapport}$, ms n'empêche pas d'en parler ds un esp projectif.