

Algèbre — Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : 124. Anneau des séries formelles. Applications.

Autre sujet : Références : Goblot, Calais

Corollaire 6: $A[[X]]$ est intègre si A est intègre.
En particulier, si K est un corps, $K[[X]]$ est intègre.

Proposition 7: $F = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$ est inversible dans $A[[X]]$ si a_0 est inversible dans A .

Proposition 8: Si K est un corps,
 $K[[X]]^* = \{F : v(F) = 0\}$.

De plus, $K[[X]]$ est euclidien de stadme la valuation, et ses idéaux sont les (X^p) pour $p \in \mathbb{N}$.

Proposition 9: Si on suppose A intègre, $F = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$, a_0 irréductible dans $A \Rightarrow F$ irréductible dans $A[[X]]$.

Remarque 10: La réciproque est fautive: X est irréductible dans $A[[X]]$.

3 - Propriétés topologiques

Définition 11: Pour $F, G \in A[[X]]$, on définit
 $d(F, G) = \exp(-v(F - G))$.

Proposition 12: d est une distance ultramétrique:
pour $F, G, H \in A[[X]]$,

$$d(F, G) \leq \max(d(F, H), d(H, G)).$$

Proposition 13:

* $(A[[X]], d)$ est complet.

* $A[[X]]$ est dense dans $A[[X]]$.

Remarque 14: Si on note $F_n = \sum_{k=0}^n a_k X^k$,

$$\sum_{k \geq 0} a_k X^k = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n.$$

Ceci explique l'appellation "série formelle".

On considère un anneau unitaire et commutatif A .

I - Structure de $A[[X]]$

1 - Définition

Définition 1: $A[[X]]$ est le A -module $A^{\mathbb{N}}$, ou

on note $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n := (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On le munit d'une loi de multiplication:

$$\left(\sum_{p \geq 0} a_p X^p \right) \left(\sum_{q \geq 0} b_q X^q \right) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{p+q=n} a_p b_q \right) X^n.$$

$A[[X]]$ possède alors une structure de A -algèbre commutative dont l'élément unité est $1 = (1, 0, 0, \dots)$.

Remarque 2: On a les inclusions:

$$A \subset A[X] \subset A[[X]].$$

Exemples 3:

* $\sum_{n \geq 0} X^n$ est inversible d'inverse $1 - X$. On la

$$\text{note } \frac{1}{1-X}.$$

* On note aussi, pour $A = K$ corps avec $\text{car}(K) = 0$:

$$\exp(X) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} X^n \quad \text{et} \quad \log(1+X) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} X^n.$$

2 - Propriétés algébriques

Définition 4: On définit la valuation v sur $A[[X]]$

$$\text{par: } v\left(\sum_{n \geq 0} a_n X^n\right) = \min\{n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0\}$$

$$\text{et } v(0) = +\infty.$$

Proposition 5: Pour $F, G \in A[[X]]$,

$$* v(F+G) \geq \min(v(F), v(G))$$

avec égalité si $v(F) \neq v(G)$

$$* v(FG) \geq v(F) + v(G) \text{ avec égalité si } A \text{ intègre.}$$

4 - Composition et dérivation

Définition 15: Une famille sommable $(F_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ d'éléments de $A[[X]]$ est une famille telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{\lambda \in \Lambda : r(F_\lambda) \leq n\}$ est fini.

Si $F_\lambda = \sum_{n \geq 0} a_{\lambda,n} X^n$, on pose alors

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} a_{\lambda,n} \right) X^n.$$

Remarque 16: Cette somme est bien définie car $(F_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ sommable $\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, \{\lambda : a_{\lambda,n} \neq 0\} \text{ est fini})$.

Proposition 17: Soit $(F_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille sommable.

* Si $(P_i)_{i \in I}$ est une partition de 1 et si pour $i \in I$, $G_i = \sum_{\lambda \in P_i} F_\lambda$ (existe car toute sous-famille d'une famille sommable est sommable), alors

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda = \sum_{i \in I} G_i.$$

* Si $(G_s)_{s \in \Delta}$ est une famille sommable, alors $(F_\lambda G_s)_{(\lambda,s) \in \Lambda \times \Delta}$ est sommable et

$$\sum_{s \in \Delta} \sum_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda G_s = \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \right) \left(\sum_{s \in \Delta} G_s \right).$$

Remarque 18: Pour $F \in A[[X]]$, $(F^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable $\Leftrightarrow r(F) \geq 1$.

Définition 19: Soient $F, G \in A[[X]]$ avec $r(G) \geq 1$. On appelle composée de F par G la série formelle

$$F \circ G = \sum_{n \geq 0} a_n G^n \quad \text{avec} \quad F = \sum_{n \geq 0} a_n X^n.$$

Remarque 20: $r(F \circ G) \geq r(F) r(G)$.

Exemples 21: Avec les notations de l'exemple 3,

$$\exp(\log(1+X)) = 1+X.$$

$$\log(1 + (\exp(X) - 1)) = X.$$

Théorème 22: Soient $G, H \in A[[X]]$ telles que $r(G), r(H) \geq 1$.

* L'application $\phi_G : A[[X]] \rightarrow A[[X]]$ est un morphisme

de A -algèbres.

* Pour $F \in A[[X]]$, $F \circ (G \circ H) = (F \circ G) \circ H$.

Définition 23: Pour $F = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$, on définit la dérivée de F comme :

$$F' = \sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} X^n.$$

Proposition 24:

* Pour $(F_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ famille sommable, $(\sum_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda)' = \sum_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda'$.

* Pour $F, G \in A[[X]]$, $(FG)' = F'G + FG'$.

* Si de plus $r(G) \geq 1$, $(F \circ G)' = G' \cdot (F \circ G)$.

* Si $\text{car}(K) = 0$, on a dans $K[[X]]$, si $r(F) \geq 1$, $r(F') = r(F) - 1$.

Exemples 25:

$$(\log(1+X))' = (1+X)^{-1} \text{ et } (\exp(X))' = \exp(X).$$

II - Applications

1 - Séries formelles et fractions rationnelles

On considère ici un corps K .

Définition 26: On définit $K(X)_0 = \left\{ \frac{P}{Q} \in K(X) : Q(0) \neq 0 \right\}$. C'est un sous-anneau de $K(X)$ contenant $K[X]$.

Proposition 27: $K(X)_0$ s'injecte canoniquement dans $K[[X]]$ via le morphisme $K(X)_0 \rightarrow K[[X]]$.

$$\frac{P}{Q} \mapsto P \cdot Q^{-1}$$

Théorème 28: Pour $f \in A[[X]]$, on a équivalence entre:

1. $f \in K(X)_0$.
2. Il existe $N \geq 1$, $m \geq N$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in K$ tels que :
 $\forall m > m, a_m - \lambda_1 a_{m-1} - \dots - \lambda_N a_{m-N} = 0$.
3. Il existe $m \geq 1$ tel que pour $n \geq m$,
 $\det(A_n) = 0$ où $A_n = (a_{i+j})_{0 \leq i, j \leq n} \in M_{n+1}(K)$.

Exemple 29: Si $\text{car}(K) = 0$ et $a \in K$ non nul,

$$\frac{1}{(a-x)^p} = \frac{1}{a^p} \sum_{n \geq 0} \binom{p+n-1}{p-1} \frac{x^n}{a^n}.$$

Application 30: Etude de la suite de Fibonacci.

2. Séries entières

Définition 31: Soit $f \in C[[X]]$, $f = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$. On définit le rayon de convergence de f comme:
 $R = \sup \{ n \geq 0 : (n! a_n) \text{ est bornée} \}.$

Exemple 32: $R(\exp) = +\infty$ et $R\left(\frac{1}{1-x}\right) = 1$.

Proposition 33: Soit $f \in C[[X]]$ de rayon de convergence R .
 Pour $r < R$, la série $\sum_{n \geq 0} a_n r^n$ converge normalement en $B(0, r)$ et sa somme y est holomorphe.

Théorème 34: On pose $C_n[[X]] = \{ f \in C[[X]] : R(f) > n \}$.

L'application $C_n[[X]] \rightarrow \mathcal{H}(B(0, n))$ est un morphisme d'anneaux injectif qui respecte les opérations 0 et dérivation.

Application 35: On considère l'équation:

$(E_0) \quad xy'' + y' + xy = 0$. Alors (E_0) admet une unique

solution développable en série entière de rayon de convergence $+\infty$.

$$\lambda(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2} \right)^{2n}.$$

3. Séries génératrices

Définition 36: On dit que des quantités $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à dénominateur leur série génératrice est $\sum_{n \geq 0} a_n X^n$.

Exemple 37: Nombres de Catalan: $C_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_k C_{n-k}$.
 $C_n = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}$

Application 38: Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux dans leur ensemble. On note S_n le nombre de p -uplets $(x_1, \dots, x_p)$ de $\mathbb{N}$ tels que $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_p x_p = n$.

$$\text{Alors } S_n \sim \frac{1}{\pi \alpha_i} \frac{(p-1)!}{n^{p-1}}.$$

Définition 39: On appelle série génératrice exponentielle de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la série $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} X^n$.

Application 40: Nombres de Bell. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n le nombre de partitions de $[1, n]$. Alors $B_n = \frac{1}{e} \sum_{k \geq 0} \frac{e^k}{k!}$.

Application 41: Nombres de dérangements. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note D_n le nombre de permutations de $[1, n]$ sans point fixe.

$$\text{Alors } D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Exercice: 1. $\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k} \in \mathbb{C}[[x]]$

2. Coeff d'ordre n.

Exercice: 6. $\{ \sigma \in \mathcal{S}_n, \sigma^2 = \text{id} \}$. Card ?

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad (n+1)$$

$$\uparrow$$

$$n+2 \rightarrow n+1$$

$$\uparrow$$

$$n \rightarrow i \in \{1, n+1\} \rightarrow n+2$$

Exercice: Inverser $\frac{1}{1-x^2} \quad \frac{1}{1-x^3}$

Equation diophantienne et série génératrice

12/12

→ Référence : Goblot, Algèbre commutative, Exercice 9.2.

Théorème : Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux dans leur ensemble.

On note S_n le nombre de p -uplets $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{N}^p$ tels que :

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_p x_p = n.$$

Alors
$$S_n \sim \frac{1}{\prod \alpha_i} \cdot \frac{n^{p-1}}{(p-1)!}$$

Démonstration :

Soit $F = \sum_{n \geq 0} S_n X^n \in \mathbb{C}[[X]]$.

* Par définition du produit de séries formelles,

$$\prod_{i=1}^p \frac{1}{1 - X^{\alpha_i}} = \prod_{i=1}^p \sum_{n_i \geq 0} X^{\alpha_i n_i} = \sum_{(n_1, \dots, n_p) \in \mathbb{N}^p} X^{\sum_{i=1}^p \alpha_i n_i} = \sum_{n \geq 0} S_n X^n = F.$$

Ainsi, F a pour seuls pôles les racines α_i -ièmes de l'unité, $i \in [1, p]$.

Or pour tout α , $T^\alpha - 1$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$ et si $\zeta^{\alpha_i} = 1$ pour tout i , on a $\zeta = 1$. En effet, comme les α_i sont premiers entre eux dans leur ensemble, il existe $n_1, \dots, n_p$ dans $\mathbb{Z}$ tels que

$$n_1 \alpha_1 + \dots + n_p \alpha_p = 1.$$

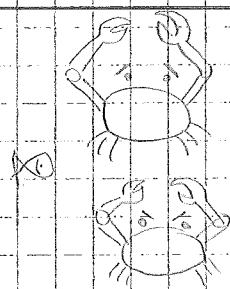
* Par conséquent, F a un pôle d'ordre exactement p en 1 et que tous les autres pôles sont situés en des racines de l'unité et d'ordre au plus $p-1$. Par décomposition en éléments simples,

$$F = \frac{A}{(1-X)^p} + \sum_{\zeta \in U} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{A_{\zeta, k}}{(\zeta - X)^k} + P(X)$$

avec $A, A_{\zeta, k} \in \mathbb{C}$,

$$U = \{ \zeta : \exists i \in [1, p], \zeta^{\alpha_i} = 1 \},$$

$$\text{et } P = \sum_{n=0}^N P_n X^n \in \mathbb{C}[X].$$



Par récurrence et dérivation sur les deux formules, pour $\exists \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{(\exists - X)^k} = \left(\frac{1}{\exists - X} \right)^k = \frac{1}{\exists^k (k-1)!} \sum_{n \geq 0} (n+1) \dots (n+k-1) \left(\frac{X}{\exists} \right)^n.$$

Ainsi, par identification des coefficients, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = A \frac{(n+1) \dots (n+k-1)}{(k-1)!} + \sum_{\exists \in \mathbb{N}} A_{\exists k} \frac{(k-1)!}{(n+1) \dots (n+k-1)} \exists^{n+k} + P_n$$

$$= A \frac{n^{k-1}}{(k-1)!} + o(n^{k-1}) + \sum_{\exists \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^{k-1} o(n^k)$$

$$= A \frac{n^{k-1}}{(k-1)!} + o(n^{k-1})$$

* Il reste à calculer A . Comme A est le coefficient attaché au pôle d'ordre k plus élevé en 1 , on a

$$A = \left((1-X)^k f(X) \right)' \Big|_{X=1}$$

$$= \left(\prod_{i=1}^k \left(\frac{1}{1+X+\dots+X^{k_i-1}} \right) \right)' \Big|_{X=1}$$

$$= \prod_{i=1}^k \frac{1}{k_i!}$$

→ Référence : Annaudici - Bertin, Groupes, algèbres et géométrie

Théorème : Soit K un corps et $K(X)_0 = \left\{ \frac{P}{Q} \in K(X) : Q(0) \neq 0 \right\}$.

Soit $F = \sum_{n \geq 0} a_n X^n \in K[[X]]$. Alors il y a équivalence entre :

1. $F \in K(X)_0$
2. Il existe $N \geq 1$, $m \geq N$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in K$ tels que :
 $\forall n > m, \quad a_n - \lambda_1 a_{n-1} - \dots - \lambda_N a_{n-N} = 0$.
3. Il existe $m \geq 1$ tel que pour tout $n \geq m$,
 $\det(A_n) = 0$ où $A_n = (a_{i+j})_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}} \in M_{n+1}(K)$.

Démonstration :

(1) $\Leftrightarrow$ (2) Soit $D = 1 - \lambda_1 X - \dots - \lambda_N X^N \in K[X]$. On a

$$FD = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(a_n - \sum_{k=1}^{\min(N, n)} \lambda_k a_{n-k} \right) X^n.$$

Donc si (2) est vérifiée, FD est de degré fini et donc $F \in K(X)_0$.

Réciproquement, si $F \in K(X)_0$, il existe D de cette forme telle que $FD \in K[X]$. Donc le terme devant X^n s'annule à partir d'un certain rang $m \geq N$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Soient N, m et $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ comme dans (2).

Soit $n \geq m$. Notons $C_0, \dots, C_n$ les colonnes de A_n .

D'après (2), $C_n - \sum_{k=1}^N \lambda_k C_{n-k} = 0$ d'où $\det(A_n) = 0$.

(3) $\Rightarrow$ (2) * Montrons que la suite $(\det(A_n))_n$ n'est pas identiquement nulle.

Soit $q = v(F)$. On peut supposer $F \neq 0$, c'est-à-dire $q < +\infty$.

On a $a_0 = \dots = a_{q-1} = 0$ et $a_q \neq 0$ donc

$$A_q = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_q \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \\ a_q & & & * \end{pmatrix}$$

D'où $\det(A_q) = (-1)^q a_q^{q+1} \neq 0$.

Ainsi, il existe un unique entier p tel que :

$$\det(A_p) \neq 0 \quad \text{et} \quad \forall n > p, \quad \det(A_n) = 0.$$

* Soit $C_0, \dots, C_{p+1}$ les colonnes de A_{p+1} . On pose $m = p+1$.

$\det(A_m) = 0$ mais $\det(A_p) \neq 0$ donc C_m est combinaison linéaire de $C_0, \dots, C_p$: il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in K^m$ tel que

$$C_m = \sum_{k=1}^m \lambda_k C_{m-k}$$

$$\text{i.e. } \forall n \in \llbracket m, 2m \rrbracket, a_n = \sum_{k=1}^{k=n} \lambda_k a_{n-k}$$

Pour $j \geq m$, on pose $b_j = a_j - \sum_{k=1}^m \lambda_k a_{j-k}$. On a donc $b_j = 0$

pour $j \in \llbracket m, 2m \rrbracket$.

* Généralisons cette propriété par récurrence :

Soit $k \geq 1$. Supposons que $b_j = 0$ pour $j \in \llbracket m, 2m+k-1 \rrbracket$. Notons $C_0, C_1, \dots, C_{m+k}$ les colonnes de A_{m+k} .

$$A_{m+k} = \left(\begin{array}{c|c} A_p & * \\ \hline a_{m+k} & \vdots \\ a_{2m+k} & \vdots \end{array} \right)$$

On réalise les opérations sur les colonnes : $C_{m+k} \leftarrow C_{m+k} - \sum_{i=1}^m \lambda_i C_{m+k-i}$

$$\vdots \\ C_m \leftarrow C_m - \sum_{i=1}^m \lambda_i C_{m-i}$$

On obtient :

$$0 = \det A_{m+k} = \left| \begin{array}{c|c} A_p & * \\ \hline 0 & B \end{array} \right| \text{ avec } B = \begin{pmatrix} b_{2m+k} & \dots & b_{2m+k} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m+k} & \dots & b_{m+k} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ b_{2m+k} & \dots & b_{2m+k} \end{pmatrix} *$$

$$\text{D'où } \det A_{m+k} = \det A_p \cdot \det B \neq 0$$

donc $\det B = 0$ et $b_{2m+k} = 0$.

□