

Leçon 157 : endomorphismes trigonalisables, endomorphismes nilpotents

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On note M_u le polynôme minimal de u , pour $A \in \mathcal{M}_n(K)$,
on note $\chi_A = \det(XI_n - A)$ le polynôme caractéristique de A . On
note χ_u le polynôme caractéristique de u , on note $\text{Sp}(u)$ le spectre de u ,
et $\text{tr}(u)$ la trace de u .

I/ Endomorphismes trigonalisables

1) Définition et caractérisations

Def.1: u est dit trigonalisable s'il existe une base de E
dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.

Ex.2: Si la matrice de u dans l'une des bases de E est
triangulaire inférieure, alors u est trigonalisable.

Prop.3: Si u est trigonalisable, alors u possède un
vecteur propre.

Th.4: Les assertions suivantes sont équivalentes:

- i) u est trigonalisable
- ii) χ_u est scindé
- iii) M_u est scindé
- iv) u admet un polynôme annulateur scindé

Ex.5: $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ est trigonalisable car $\chi_A(X) = (X-1)^2$
 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est trigonalisable car $(A - I_3)^3 = 0$

Cor.6: Si K est algébriquement clos, tout endomorphisme
du K -espace vectoriel E est trigonalisable. En
particulier, toute matrice de $\mathcal{M}_n(K)$ est trigonalisable.

Contre-ex.7: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ vue dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, n est
pas trigonalisable puisque $\chi_A = X^2 + 1$

Cor.8: Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in K$ les valeurs propres de u
dans la clôture algébrique de K , de multipli-
cités $m_1, \dots, m_s$. Alors:
 $\text{tr } u = \sum_{i=1}^s m_i \lambda_i$ et $\det u = \prod_{i=1}^s \lambda_i^{m_i}$

Appl.9: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$. Alors $\text{tr}(A) = 0$

2) Co-trigonalisation

Def.10: Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de $\mathcal{L}(E)$. On dit que (u_i)
est co-trigonalisable, s'il existe une base de trigona-
lisation commune à tous les u_i .

Prop.11: Si u et v sont co-trigonalisables, alors
 $u+v$ et uv sont trigonalisables.

Contre-ex.12:

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont trigonalisables sur $\mathbb{R}$, mais
 $A+B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ne l'est pas
- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sont trigonalisables sur $\mathbb{R}$, mais
 $AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ne l'est pas

Lemme 13: Si u est trigonalisable et F sous-espace de E stable par u ,
alors l'endomorphisme induit $u|_F$ est trigonalisable.

Lemme 14: Si u et v commutent alors:

- tout sous-espace propre de u est stable par v
- v est trigonalisable sur u

Th.15: Une famille d'endomorphismes trigonalisables qui
commutent 2 à 2, est co-trigonalisable.

3) Propriétés topologiques

$K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

On note $\mathcal{D}_n(K)$ les matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(K)$
 $\mathcal{T}_n(K)$ ——— trigonalisables ———

Prop.16: $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Prop.17: $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) (= \mathcal{T}_n(\mathbb{C}))$
 $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ ——— $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$

Appl.18: preuve du th. de Cayley-Hamilton sur $\mathbb{C}$

Rq.19: $\mathcal{T}_n(\mathbb{R}) \neq \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ n'est pas dense dans
 $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En exemple, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas la limite d'une
suite de matrices de $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$

II/ Endomorphismes nilpotents 1) Déf. et caractérisations

Def.20: u est nilpotent s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$

Prop.21: $\{p \in \mathbb{N}^*, u^p = 0\}$ admet un plus petit élément; on
le note π et on l'appelle l'indice de nilpotence de u

Ex.22:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sont nilpotentes d'indice 2

$u: K_n[X] \rightarrow K_{n-1}[X]$ est nilpotente d'indice $n+1$
 $p \mapsto p'$

Th.23: Les assertions suivantes sont équivalentes:

- i) u est nilpotent
- ii) $\chi_u = X^n$
- iii) $M_u = X^n$ où π = indice de nilpotence de u
- iv) u est trigonalisable et $\text{Sp}(u) = \{0\}$

Rq.24: En particulier, si u est nilpotent alors u est trigona-
lisable. La réciproque est fautive; I_n est trigonalisable
mais pas nilpotent.

Cor.26: $\pi \leq n$

Cor.27: Si u est diagonalisable et nilpotent, alors $u = 0$

Prop.28: Si K est de caractéristique nulle, alors on a équi-
valence;

- u est nilpotent
- $\text{tr}(u^k) = 0$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$

Contre-ex.29: C'est faux en caractéristique nulle; $I_p \in \mathcal{M}_p(\mathbb{F}_p)$
n'est pas nilpotent, pourtant $\text{tr}(I_p^k) = p = 0 \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$

2) Etude du cône nilpotent

On note $\mathcal{N}(E)$ les endomorphismes nilpotents de $\mathcal{L}(E)$,
et $\mathcal{N}_n(K)$ les matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(K)$.

Prop 30:

- Si u et v sont nilpotents et commutent, alors $u+v$ est nilpotent
- Si u est nilpotent et si u et v commutent, alors uv est nilpotent

Contre-ex 31:

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont nilpotents, mais $A+B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas nilpotent et $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ non plus
- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotent mais $A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas nilpotent

Prop 32: $\mathcal{N}(E)$ n'est donc ni un sous-groupe de $\mathcal{L}(E)$, ni un idéal, ni un sous-espace vectoriel.

C'est un cône (stable par multiplication par un scalaire)

Prop 33: $\text{Vect}(\mathcal{N}(E)) = \text{Ker}(E)$

Cor 34: $\text{Vect}(\mathcal{N}(E))$ est un hyperplan

Ex 35: $\mathcal{N}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), a+d=0 \text{ et } ad-bc=0 \right\}$
 $= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), a^2+bc=0 \right\}$

On peut dessiner ce cône dans l'espace vectoriel de dimension 3 $\text{Vect}(\mathcal{N}_2(\mathbb{R}))$, voir annexe.

Prop 36: Cardinal du cône nilpotent sur un corps fini

Soit $d \geq 1$, $|\mathcal{N}_d(\mathbb{F}_q)| = q^{d(d-1)}$ DVP 1

La preuve utilise le lemme de Eting;

Lemme 37: Eting

La suite $(\dim \text{Ker } u^k)_{k \geq 0}$ est croissante et stationnaire. On note r_0 le rang à partir duquel elle stationne. On appelle r_0 l'indice de u .

On a alors: $E = \text{Ker } u^{r_0} \oplus \text{Im } u^{r_0}$

De plus: $u|_{\text{Ker } u^{r_0}}$ est nilpotent

$u|_{\text{Im } u^{r_0}}$ est inversible

III / Décomposition d'endomorphismes trigonalisables, à l'aide d'endomorphismes nilpotents

1) Décomposition de Dunford

Th. 38: Si Xu est scindé (ie u trigonalisable), alors il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$

tel que:

- d est diagonalisable
- n est nilpotent
- $u = d + n$
- d et n commutent

DVP 2

De plus, d et n sont des polynômes en u .

Ex 39: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{I_2}{D} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_N$ est une décomposition de Dunford

Contre-ex 40:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas une décomposition de Dunford, car $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne commutent pas!

En fait A est diagonalisable donc sa décomposition de Dunford est $A = A + 0$.

Appli 41: Soit $A = D + N$ la décomposition de Dunford de A . Alors $\exp A = \exp D \exp N$

Appli 42: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que X_A est scindé. Alors, A est diagonalisable si et seulement si $\exp A$ est diagonalisable. DVP 2

Appli 43: Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Alors il existe $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $\exp(Q(A)) = A$

2) Réduction de Jordan

@ Sur les endomorphismes nilpotents

Lemme 44: On a vu (Lemme 37) que la suite $(\dim \text{Ker } u^k)_{k \geq 0}$ est croissante. On a de plus:

$\dim \text{Ker } u^{k+1} = \dim \text{Ker } u^k + \dim(\text{Ker } u \cap \text{Im } u^k)$
 et donc la suite $(\dim \text{Ker } u^{k+1} - \dim \text{Ker } u^k)_{k \geq 0}$ est décroissante.

Def 45: Tableau d'Young

Un tableau d'Young de taille n est 1 partition de n $(d_i)_{1 \leq i \leq m} \subset \mathbb{N}^*$ telle que $d_m \leq \dots \leq d_1$ et $\sum_{i=1}^m d_i = n$, représentée par cases juxtaposées:

d_m cases $\rightarrow$

d_2 cases $\rightarrow$
 d_1 cases $\rightarrow$

Def 46: Soit u nilpotent. On appelle tableau d'Young associé à u , et on note $T(u)$, le tableau d'Young donné par la partition $d_i = \dim \text{Ker } u^i - \dim \text{Ker } u^{i-1}$

Def 47: Bloc de Jordan

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $r \in \mathbb{N}^*$. On appelle bloc de Jordan de taille r associé à λ et on note $J_r(\lambda)$, la matrice:

$$J_r(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$$

Th. 48: Soit u nilpotent. Alors il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme:

$$\begin{pmatrix} J_{r_1}(0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{r_m}(0) \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} r_i \in \mathbb{N}^* \forall i \in \{1, m\} \\ \sum_{i=1}^m r_i = n \end{matrix}$$

On appelle cette matrice la forme de Jordan de u

Rq 49; La forme de Jordan de $u \in \mathcal{M}_n(K)$ est entièrement déterminée par $T(u)$, c'est-à-dire par la suite $(\dim \ker u^{k+1} - \dim \ker u^k)_{k \geq 0}$. En particulier, elle est unique à permutation des blocs près.

Appli 50; Dénombrément des classes de conjugaison de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Prop. 50.1; 2 matrices nilpotentes sont semblables si et seulement si elles ont le même tableau de Young.

Ainsi il y a autant de classes de conjugaison de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, que de partitions de n .

Ex 50.2; Il y a 5 classes de conjugaisons dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$
Voir annexe.

② Réduction de Jordan d'un endomorphisme trigonalisable

Th. 51; Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\chi_u = \prod_{i=1}^s (x - \lambda_i)^{\alpha_i}$
Alors, il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme:

$$\begin{pmatrix} J_{r_{1,1}}(\lambda_1) & & & \\ & \ddots & & \\ & & J_{r_{s,1}}(\lambda_s) & \\ & & & \ddots & \\ & & & & J_{r_{s,m_s}}(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

où $r_{ij} \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{j=1}^{m_i} r_{ij} = \alpha_i \quad \forall i \in \{1, \dots, s\}$.

On appelle cette matrice la forme de Jordan de u .

Rq 52; La forme de Jordan de u trigonalisable, est unique à permutation des blocs près.

Rq 53; Si $\chi_u = \prod_{i=1}^s (x - \lambda_i)^{\alpha_i}$, alors $M_u = \prod_{i=1}^s (x - \lambda_i)^{\beta_i}$
où β_i est la taille du plus gros bloc de Jordan associé à λ_i .

Rq 54; On retrouve la décomposition de Dunford:

Si $A = PJP^{-1}$ où J = forme de Jordan de A , alors:

$A = D + N$, avec $D = PD_1P^{-1}$, $N = PN_1P^{-1}$ où D_1 désigne la diagonale de J et N_1 la sur-diagonale, c'est la décomposition de Dunford de A .

Appli 55; Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, Alors A et B sont semblables si et seulement si elles ont la même forme de Jordan.

Appli. 56; Soit $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$, Alors A et A^t sont semblables.

Appli 57;

- Soient $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, Alors A et B sont semblables si et seulement si $M_A = M_B$

- Soient $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, Alors A et B sont semblables si et seulement si $M_A = M_B$ et $\chi_A = \chi_B$

Contre-ex 58; $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables, mais $M_A = M_B = (x-1)(x-2)$

Contre-ex 59; $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables mais $M_A = M_B = x^2$, $\chi_A = \chi_B = x^4$

Appli. 60; Calcul d'exponentielles de matrices

$$\exp(tJ_{r,1}(\lambda)) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \\ & 1 & t & \dots & \frac{t^{r-2}}{(r-2)!} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

donc on déduit $\exp(tA)$ où A est trigonalisable

Appli. 61; Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants

Appli. 61.1; La solution du système : $\begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases} (*)$ (où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)

est donnée par : $X(t) = \exp(tA)X_0$

D'où l'intérêt de l'application 60

Appli. 61.2; Classification des points d'équilibre du système (*) dans le cas $n=2$

L'allure des trajectoires du système dépend de la nature des valeurs propres de A , on considère A inversible, ainsi 0 est le seul point d'équilibre (v tel que $Av=0$)

1. Si A a 2 valeurs propres réelles distinctes λ_1 et λ_2 ;

Alors A est semblable à $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

3 situations sont possibles selon si $0 < \lambda_1 < \lambda_2$,

$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ ou $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$

2. Si A a 1 valeur propre réelle double λ avec 2 vecteurs propres linéairement indépendants:

Alors A est semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

2 situations sont possibles selon le signe de λ
 $(\lambda \neq 0 \text{ car } A \text{ inversible})$

3. Si A a 1 valeur propre réelle double λ avec 1 seul vecteur propre associé à λ ;

Alors A est semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

2 situations sont possibles selon le signe de λ

4. Si A a 2 valeurs propres complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$;

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, A est semblable à $\begin{pmatrix} \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & \alpha - i\beta \end{pmatrix}$

Soient $Z = u + iv$ un vecteur propre associé à $\alpha + i\beta$

Alors (u, v) est 1 base dans laquelle A s'écrit:

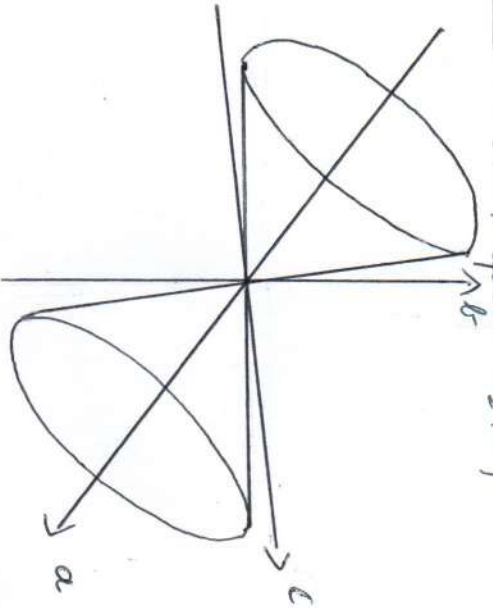
$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

3 situations sont possibles selon le signe de α
 $(\alpha = 0, \alpha > 0, \alpha < 0)$

Voir annexe.

Annexe

Exemple 3.5: Le cône nilpotent $\mathcal{N}_2(\mathbb{R})$

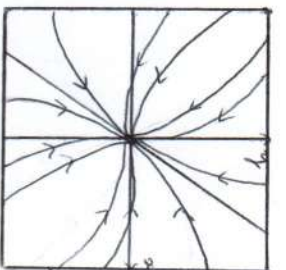


Exemple 50.2: Les 5 classes de conjugaison de $\mathcal{N}_4(\mathbb{C})$

Tableau d'Young	$4 = 4 + 0$	$4 = 3 + 1$	$4 = 2 + 2$	$4 = 2 + 1 + 1$	$4 = 1 + 1 + 1 + 1$
Forme de Jordan	$\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

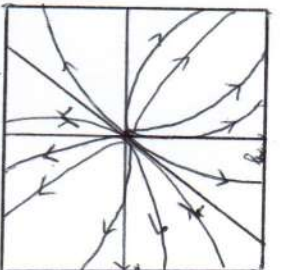
Application 61.2:

1



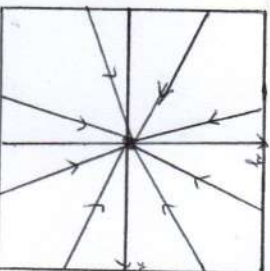
$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$
Nœud stable

2

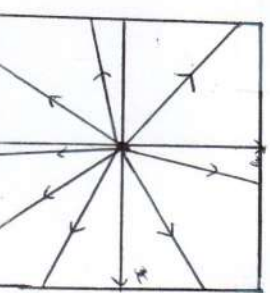


$\lambda_2 > \lambda_1 > 0$
Nœud instable

3

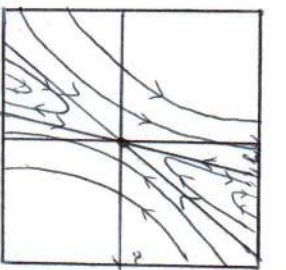


$\lambda < 0$
Puits

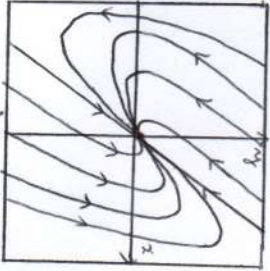


$\lambda > 0$
Source

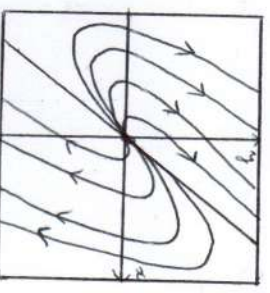
4



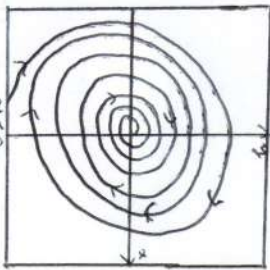
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$
Point selle



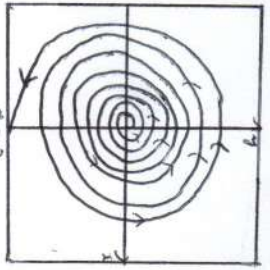
$\lambda_1 < 0$
Nœud dissipatif stable



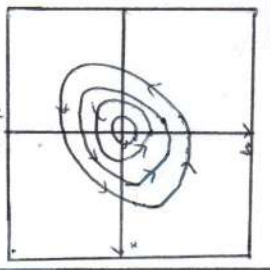
$\lambda_1 > 0$
Nœud dissipatif instable



$\alpha < 0$
Cycle limite



$\alpha > 0$
Cycle limite



$\alpha = 0$
Cycle limite