I Généralités sur les courbes

A) Définitions

Déf : On appelle arc paramétré une application $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ avec I intervalle fermé de $\mathbb{R}$ $(I = [a,b])$

Selon le cas, on supposera γ $\mathcal{C}^0, \mathcal{C}^1, \mathcal{C}^2, \dots$ par morceaux

On appelle un arc lacet lorsque $\gamma(a) = \gamma(b)$

Déf : Deux arcs sont dits équivalents lorsqu'on peut écrire $\gamma' = \gamma \circ f$ avec f $\mathcal{C}^2$-difféo

Déf : Pour deux arcs $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ et $\gamma_2 : [b,c] \to \mathbb{R}^n$ avec $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, on définit leur somme comme $\gamma : x \in [a,c] \mapsto \begin{cases} \gamma_1(x) \text{ si } x \in [a,b] \\ \gamma_2(x) \text{ si } x \in [b,c] \end{cases}$. Elle a la même régularité

B) Notions métriques

Déf : Un arc est dit rectifiable lorsque les longueurs de ses interpolations affines sont majorées.

Dans ce cas, on appelle longueur de l'arc leur sup

Prop : $L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$ (pour γ $\mathcal{C}^1_{\text{pm}}$)

Prop : Deux arcs équivalents ont la même longueur

Ex : La longueur du segment $[x,y]$ $(x,y \in \mathbb{R}^n)$ vaut $\|y-x\|$

La longueur du cercle unité vaut 2π

Thm : Soit γ $\mathcal{C}^2$ injective et $x \in \gamma(]a,b[)$

Pour tout a,b,c, on note $\rho(a,b,c)$ le rayon de l'unique cercle passant par ces trois points $(\in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\})$

Alors $\lim\limits_{\substack{a,b,c \to x \\ a,b,c \in \operatorname{Im}\gamma}} 1/\rho(a,b,c)$ existe, on l'appelle courbure de γ en x

Déf : La courbure totale d'un arc $\mathcal{C}^2_{\text{pm}}$ est donnée par l'intégrale de sa courbure, + la somme sur ses points de dis-$\mathcal{C}^2$ité de la limite de l'angle

Thm : La courbure des interpolations affines d'une courbe converge vers celle de la courbe quand le pas tend vers 0

C) Notions topologiques

Déf : Deux arcs $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ sont dits homotopes lorsqu'il existe un $\gamma : [0,1] \times [a,b] \to \mathbb{R}^n$ avec la même régularité, $\gamma(0,\cdot) = \gamma_0$, $\gamma(1,\cdot) = \gamma_1$ et $\gamma(\cdot,a)$ et $\gamma(\cdot,b)$ constants

Prop : À homotopie près, les lacets forment un groupe

Thm : Dans $\mathbb{C}^*$, ce groupe est isomorphe à $\mathbb{Z}$. On appelle indice d'un lacet son image dans $\mathbb{Z}$ (choix arbitraire)

D) Inégalité isopérimétrique

Thm : (Jordan) Un lacet $\mathcal{C}^0$ injectif délimite deux composantes connexes, dont exactement une finie

Thm : (inégalité i-p) À longueur finie, la surface de la composante connexe finie est maximale pour un cercle

II Connexité par arcs

Déf : Deux points sont dits reliés lorsqu'il existe un arc dont ils sont les extrémités

Prop : C'est une relation d'équivalence

Déf : Un ensemble est dit connexe par arcs lorsque tous ses points sont reliés

|| Prop : La connexité par arcs implique la connexité

Prop : Pour un ouvert, on a la réciproque

Contre-ex : $\{(x, \sin 1/x),\ x > 0\} \cup \{(0, y),\ y \in [-1, 1]\}$

Ex : Pour E fini, $\mathbb{C} \setminus E$ connexe par arcs

Application : $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe

$\to$ $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ est surjective

III Analyse complexe (tous les arcs sont supposés rectifiables)

A) Intégrale d'une fonction le long d'un arc

Prop : Pour f $\mathcal{C}^0$ et $\gamma, \tilde{\gamma}$ $\mathcal{C}^1$ équivalents, on a

$$\int_I f(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt = \int_{\tilde{I}} f(\tilde{\gamma}(t))\, \tilde{\gamma}'(t)\, dt$$

Déf : On appelle intégrale de f le long d'un chemin la valeur précédente

|| Thm : Pour f $\mathcal{C}^0$ sur un ouvert de $\mathbb{C}$, f primitivable ssi l'intégrale de f sur tout lacet est nulle

Ex : Les $z \mapsto z^n$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ ont une intégrale nulle sur tout lacet (de $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{C}^*$)

Thm : Sur un ouvert simplement connexe, l'intégrale sur tout lacet d'une fonction holomorphe est nulle

B) Formules autour de l'indice

Prop : $\mathrm{ind}_\gamma(z_0) = \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z - z_0}\, dz$ (pour $z_0 \notin \mathrm{im}\, \gamma$)

Thm (formule de Cauchy) : Pour f holomorphe sur un ouvert simplement connexe et $z_0 \notin \operatorname{im} \gamma$,

$$f(z_0)\, \operatorname{ind}_\gamma(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz$$

Thm : Avec les mêmes hypothèses,

$$f^{(n)}(z)\, \operatorname{ind}_\gamma(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz$$

c) Théorème des résidus

Application : $\int_0^R \frac{\sin t}{t} \xrightarrow{R\to+\infty} \frac{\pi}{2}$

Thm : (des résidus) Pour f méromorphe sur un ouvert simplement connexe et γ ne rencontrant aucun pôle,

$$\int_\gamma f = 2i\pi \sum_{z_k \text{ pôle}} \operatorname{Res}(f, z_k)\, \operatorname{ind}_\gamma(z_k)$$

DVPT

Application : Pour z tq $\operatorname{Re}(z) \in \,]0,1[$,

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin z\pi}$$

IV Théorie des noeuds ($\mathbb{R}^3$)

Dans cette partie, les lacets sont supposés injectifs, et la définition de l'homotopie est adaptée.

Déf : Un noeud est dit trivial lorsqu'il est homotope à une "constante"

Déf : Une projection d'un noeud dans une direction est dite propre lorsque les points multiples sont en nombre fini et de multiplicité 2

Thm : Pour un noeud $\mathcal{C}^1$, presque toutes ses projections sont propres

Thm : (Reidemeister) Deux noeuds sont homotopes ssi, pour une direction donnée de propreté commune, on peut passer de l'un à l'autre par 3 règles (voir annexe)

Déf : Une projection de noeud est dite tricolorable lorsqu'il existe une fonction non constante des branches dans $\{a, b, c\}$ tq chaque point multiple ait 1 ou 3 couleurs

Thm : La tricolorabilité est invariante par changement de projection et par homotopie

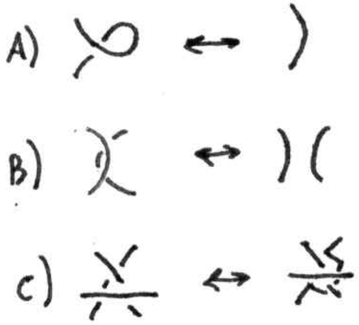
Thm : La courbure d'un noeud est égale à la moyenne des courbures de ses projections

DVPT

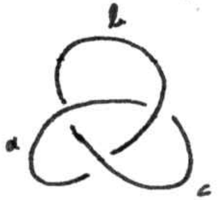
Application : (Milnor) Tout noeud non trivial a une courbure au moins 4π

Annexe :

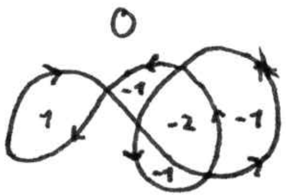
Reidemeister



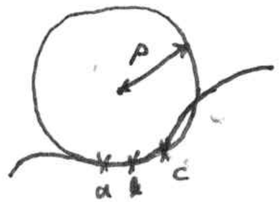
Noeud de trèfle



Indice d'un point par rapport à un lacet

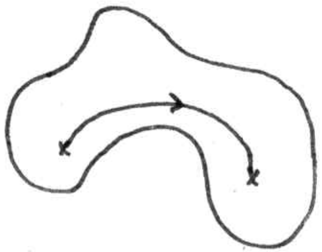


Courbure



Interpolation affine

Connexité par arcs



Contre - exemple connexité par arcs