149	Valeurs propres et vecteurs propres. Calculs exactes et approchés. Applications.

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I] Introduction à la notion

① Présentation :

Def_① [Valeur propre (vp)]
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$ est vp de M si $(M - \lambda I_n)$ n'est pas inversible.
On note $Sp(M)$ l'ensemble des vps de M.

Def ② [vecteur propre ($\vec{vp}$)] $X \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ est $\vec{vp}$ de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ associé à la vp λ si $MX = \lambda X$.

Def_③ (polynôme caractéristique]
Le polynôme caractéristique de M où $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est donné par $\chi_M(X) = \det[XI_n - M]$.

Prop ④ : Les vps de M sont les racines de χ_M.

exple ⑤ : La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a pour valeur propre 1 de multiplicité 2
La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ n'a pas de valeurs propres dans $\mathbb{R}$.

② Application

Def ⑥ L'isobarycentre g des points complexes $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ est défini par $g = \frac{z_1 + \dots + z_n}{n}$

Thme ⑦ [Determinant circulant] :
Soient $a_0, \dots, a_{n-1}$ des complexes.
On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$
Alors $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix} = \prod_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{kj}$

Thme ⑧ [Suite de polygone] DVP 1
Soit P polygone du plan complexe dont les sommets sont $\{z_1, \dots, z_n\}$. On définit par récurrence la suite de polygones $(P_k)_{k \geq 0}$ avec $P_0 = P$ et où les sommets de P_{k+1} sont les milieux des arêtes de P_k. Alors la suite $(P_k)_k$ converge vers l'isobarycentre de P.

③ Normes matricielles : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Def ⑨ (Rayon spectral]
$\rho(M) := \max \{|\lambda|, \lambda \in Sp(M)\}$.

Rmq ⑩ Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on prend en compte les vps complexes dans le calcul du rayon spectral.

Rappel ⑪ Soit $x \in \mathbb{K}^n$,
$\|x\|_p = (\sum |x_j|^p)^{1/p}$
$\|x\|_\infty = \max_j |x_j|$.

Thme ⑫ En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes

Def ⑬ (Normes matricielles subordonnées]:
Si $\|.\|$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$, on pose $|||M||| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Mx\|}{\|x\|} = \max_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$

Prop ⑭ Il s'agit d'une norme d'algèbre : $|||A.B||| \leq |||A|||.|||B|||$. et $|||I_n||| = 1$ $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Exple ⑮ : $|||A|||_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$
$|||A|||_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$

$|||A|||_2 = \rho(A^* A)^{1/2}$

où $A^* = {}^t\overline{A}$ (la trans-conjugué.)

Prop (16) Pour toutes norme matricielle, on a $\rho(A) \leq |||A|||$.

II) Calculs approchés.

1) Localisation des vps.

Thme (17) [thme de Gershgorine].
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in Sp(A)$ une valeur propre de A. Il existe un indice $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que

$$|\lambda - a_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$$

c'est à dire que toutes les valeurs propres $\lambda \in Sp(A)$ se trouvent dans $D = \bigcup_{i=1} \mathcal{D}_i$ avec

$$\mathcal{D}_i := \left\{ \lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda - a_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \right\}$$

Def (18) (Conditionnement de matrice): Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible et $|||.|||$ une norme matricielle, alors le conditionnement de A est $\text{cond}(A) = |||A|||.|||A^{-1}|||$

Thme (19) [Stabilité des vps]:
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable : $\exists U \in Gl_n(\mathbb{K})$ et tq $U^{-1}AU = \text{Diag}(\lambda_i)$. Notons $A(\varepsilon) = A + \varepsilon C$ la matrice donnée par $a_{ij}(\varepsilon) = a_{ij} + \varepsilon c_{ij}$ où $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ quelconque. Alors pour chaque vp $\lambda(\varepsilon)$ de $A(\varepsilon)$, il existe un $\lambda_i \in Sp(A)$ tel que

$$|\lambda(\varepsilon) - \lambda_i| \leq \varepsilon\, \text{cond}_\infty(U)\, \|C\|_\infty.$$

2) Méthode de la puissance

Principe (20) : On cherche à approcher la vp λ_1 de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $|\lambda_1| = \rho(A)$. On choisit $x_0 \in \mathbb{K}^n$ tel que $x_0 \notin \text{Ker}(A - \lambda_1 I_n)^\perp$.

Algo: $\left| \begin{array}{l} z_{k+1} = A x_k \\ x_{k+1} = \dfrac{z_{k+1}}{c_{k+1}} \end{array} \right.$ où $c_{k+1} = z^{(k+1)}_{j_{k+1}}$ et $|z^{(k+1)}_{j_{k+1}}| = \|z^{(k+1)}\|_\infty$.

Le but est que $(x_k)_k$ tende vers un vecteur propre associé à λ_1. DVP 2

Thme (21) [convergence de la méthode de la puissance]:
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable dans $\mathbb{K}$ et λ_1 la plus grande vp en module, de multiplicité $p > 0$. Supposons qu'il n'y ait pas de vp $\lambda \in Sp(A)$ tq $\lambda \neq \lambda_1$ et $|\lambda| = |\lambda_1|$. Si $x_0 \in \mathbb{K}^n$ et $x_0 \notin \text{Ker}(A - \lambda I_n)^\perp$, alors la suite $(x^{(k)})_k$ de l'algo converge vers un vecteur propre $x \in \mathbb{K}^n$ associé à la vp λ_1.

2) Méthode de Jacobi

$A \in S_n(\mathbb{R})$

a) Dimension 2 ($n=2$)

Principe (22) $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

on choisit θ tq PAP^T soit diagonale: $A^{(0)} = A$, $A^{(1)} = PA^{(0)}P^T = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \beta' & \gamma' \end{pmatrix}$

La matrice $A^{(1)}$ contient les vps de A.

b) Cas général.

Principe (23) On cherche à annuler les coefficient non diagonaux de A en multipliant par une matrice $P_{p,q}$ qui dépend d'un paramètre θ.
on cherche p, q, θ qui nous arrange.

$$P_{pq} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccc} & p & q & \\ \left(\begin{matrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \cos\theta & \sin\theta & \\ & & -\sin\theta & \cos\theta & \\ & & & & \ddots \; 1 \end{matrix}\right) & \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow p \\ \leftarrow q \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

$A^{k+1} = (P^k)^T A^{(k)} P^k$

Thme 24 (convergence de la méthode de Jacobi)
Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ et $(A^{(k)})_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la suite définie par la méthode de Jacobi. Alors la suite $(A^{(k)})_k$ converge vers une matrice diagonale D ne contenant que les vps de A. De plus, les vecteurs colonnes du produit des P_{pq} construites à chaque itérations convergent vers les vecteurs propres associés.

4) Méthode QR :

Principe 25
| Q = matrice orthogonale
| R = matrice triang sup.

Algo : $A^{(0)} = A$
étape k : calcul de $R^{(k)}, Q^{(k)}$ tel que
$A^{(k)} = Q^{(k)} R^{(k)}$
$A^{(k+1)} = R^{(k)} Q^{(k)}$.

Thme 26 : (convergence méthode QR)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice dont les vps $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ sont telles que $|\lambda_1| > \dots > |\lambda_n| > 0$. Alors la suite des termes diagonaux de matrices $(A^{(k)})_k$ construite par la méthode QR donnée ci-dessus converge vers les vps de A : $\lim_{k\infty} \mathrm{diag}(A^k) = (\lambda_1 \dots \lambda_n)$
Si de plus A est symétrique, alors la suite $(A^{(k)})$ converge vers une matrice diagonale.

III) Application à la résolution de système linéaire.

Soit le système $Ax = b$. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $b \in \mathbb{K}^n$.

1) Généralité sur les méthodes itératives :

$u_{k+1} = Bu_k + c$

u_0 arbitraire
B dépend de A
c dépend de A et b.

Thme 27 : Les propositions suivantes sont équivalentes :
(i) La méthode itérative est convergente
(ii) $\rho(B) < 1$
(iii) $|||B||| < 1$ pour au moins une norme matricielle.

Principe 28. $A \in GL_n(\mathbb{K})$, on la réécrit $A = M - N$ où M inversible et facile à inverser.

2) Exemples de méthode itérative :

a) Méthode de Jacobi : $A = \begin{bmatrix} \diagdown & & -F \\ & D & \\ -E & & \diagdown \end{bmatrix}$

Principe 29 $M = D$ $N = E + F$

Thme 30 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice à diagonale strictement dominante ie telle que $|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$ $\forall i \in \{1, \dots, n\}$

Alors pour tout $x^{(0)} \in \mathbb{K}^n$, la suite $(x^{(k)})_k$ donnée par la méthode de Jacobi est bien définie et converge vers la solution x du système $Ax = b$.

Rmq 31 : Il existe d'autres méthodes comme celle de Gauss-Seidel où $M = D - E$ et $N = F$, ou la méthode de relaxation où $M = \frac{D}{\omega} - E$ et $N = \frac{1-\omega}{\omega} D + F$ où $\omega \neq 0$.

Références :
[Serre] Les Matrices
[Ciarlet]
[Filbet] Analyse numérique
L'oral à l'agrégation de mathématiques [Isenmann / Pecatte]