- 229 - Fonctions convexes et monotones
Exemples et applications

Sauf mention du contraire, les fcts sont défini de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ où I intervalle

I Présentation

1 Définition :

1 Def : * $f : I \to \mathbb{R}$ est croissante si $\forall a \leq b$, $f(a) \leq f(b)$

* f est décroissante si $-f$ croissante

2 Def : f est monotone si f est croissante (ou décroissante) sur son intervalle de définition

3 Exple : La fonction de répartition d'une variable aléatoire est croissante

4 Exple : $]-\infty, 0] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ est décroissante

5 Def : * $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe si $\forall (x,y) \in I^2$, $\forall t \in [0,1]$ on a :
$$f(tx + (1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y)$$

* f concave si $-f$ convexe

6 Lemme : Une fonction concaves et convexe est une fonction affine

7 Appli : Inégalité de Jensen : Soit $I \subset \mathbb{R}$, si $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, alors si $f : I \to \mathbb{R}$ fonction convexe
$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

8 Rmq : On peut étendre la def 5 et l'appli 7 pour $f : \Omega \to \mathbb{R}$ où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ pour $n > 0$ qcq

9 Def : La notion de strict convexité ou strict (dé)croissance s'obtient en mettant des inégalités strictes et avec $t \in]0,1[$.

B Stabilité

10 Prop : (i) Les fonctions convexes et les fonctions monotones sont stables par addition et par multiplication par un scalaire positif.

(ii) Les fonctions croissantes sont stables par composition

(iii) Si f, g sont convexes et positives Alors $f \times g$ est convexe

(iv) Si f convexe et croissante et que g convexe, $f \circ g$ convexe.

11 Lemme : L'ensemble des fonctions convexe et l'ensemble des fonctions ne sont pas des sous-espace vectoriel

C Caractérisation :

12 Prop : Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Il y a équivalence entre

(i) f est convexe

(ii) $\mathrm{Epi}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \in I \text{ et } f(x) \leq y\}$ est une partie convexe

(iii) $\forall x_0 \in I$, l'application
$$\tau_{x_0} : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
est croissante

13 Exple : La fonction $x \mapsto |x|$ est convexe sur $\mathbb{R}$ (cf annexe)

14 contre-exple : La fonction $x \mapsto x^3$ n'est pas convexe (cf annexe)

15 Lemme : [Des 3 cordes] :
Si $f : I \to \mathbb{R}$ et $(a,b,c) \in I^3$ tel que $a<b<c$, alors :
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$
(cf annexe)

16 Prop : Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable,
f convexe (strict)
$\Leftrightarrow$ f' croissante (strict)
$\Leftrightarrow$ $\forall (y,x) \in I^2$, $(x \neq y)$
$$f(y) \underset{(>)}{\geq} f(x) + f'(x)(y-x)$$

17 Cor : Si $f : I \to \mathbb{R} \in \mathcal{D}^2(I)$,
f convexe $\Leftrightarrow$ f'' est positive

grâce à :

18 Prop : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable
* f croissante (strict) $\Leftrightarrow$ $f' \geq 0$ $(f'>0)$
* f décroissante (strict) $\Leftrightarrow$ $f' \leq 0$ $(f'<0)$

19 Exple : * La fonction $\exp(x)$ est strictement convexe sur $\mathbb{R}$
* La fonction $\log(x)$ est strictement concave sur $\mathbb{R}_+^*$
* La fonction $x \mapsto x^2$ est strictement convexe sur $\mathbb{R}$.

20 contre-exple Prop 10 (iv)
$x \mapsto x$ convexe sur $\mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$ convexe mais pas croissante sur $\mathbb{R}$
$x \mapsto x^3$ n'est pas convexe.

II Régularité

A Intervalle

21 Prop : Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est majorée et convexe, alors f est constante.

22 Prop : Soit f continue $f : I \to \mathbb{R}$
f injective $\Leftrightarrow$ f strictement monotone

23 Prop [fonction monotone]
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ monotone
f continue $\Leftrightarrow$ $f(I)$ intervalle
(cf annexe)

B Continuité et Dérivation

24 Prop : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ monotone où $I =]a,b[$
Alors f admet en tout $x_0 \in I$ des limites à droites et à gauches tel que
$$f(x_0^-) \leq f(x_0) \leq f(x_0^+)$$

25 Thme [Lebesgues] (admis) :
Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est monotone
Alors f est dérivable presque partout

26 Prop : Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ convexe
Alors f admet en tout point de $]a,b[$ des dérivés à droite et à gauche tel que $\forall x \in]a,b[$,
$$f_g(x) \leq f_d(x).$$
En particulier, $f \in \mathcal{C}^0(]a,b[)$

On a un résultat de continuité en dimension supérieur :

DVP 1

27 Prop : Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert
(H) f est convexe
(C) f est lipschitzienne sur tout compact de Ω (en part, $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$)

28 Exple : $(x,y) \mapsto x^2 + y^2$ est $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2)$

29 Contre-exple : $x \mapsto \mathbb{1}_{\{0\}}(x) + \mathbb{1}_{]0,1[}(x) \times x + \mathbb{1}_{\{1\}}(x) \times 2$
cette fonction n'est pas continue sur $[0,1]$, mais l'est sur $]0,1[$

C Limite :

30 Lemme : Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction convexe (resp croissante) qui tend simplement vers f. Alors f convexe (resp croissante)

31 Thme [Dini] (admis) :
Soit $(f_n)_n$ suite d'application croissante dans $\mathbb{R}^{[0,1]}$ qui converge simplement vers f fonction continue de $\mathbb{R}^{[0,1]}$.
Alors $(f_n)_n$ converge uniformement vers f

III Application :

A Inégalités

32 Arithmético-géométrique :
Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ des réels positifs
Alors $\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geqslant (x_1 \times \cdots \times x_n)^{1/n}$

33 Hölder : Soit $p, q > 0$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ des réels positif.
Alors $\sum_{i=1}^n x_i y_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{1/q}$

34 Minkowsky : Soit $p \geqslant 1$
Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ des réels positifs. Alors on a
$$\left[\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p\right]^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^p\right)^{1/p}$$

35 Cor : Si on définit pour $p \geqslant 1$
$N(x_1, \ldots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$
Alors N définit une norme sur $\mathbb{R}^n$

B Méthode de Newton $\boxed{\text{DVP2}}$

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit x^* un zéro de f [ie tel que $f(x^*) = 0$]

36 Thme [convergence quadratique]

(H1) $\exists$ V un voisinage de x^* tel que $\left|\begin{array}{l} f_{|V} \in \mathcal{D}^2(V) \\ f''_{|V} \text{ est borné} \end{array}\right.$

(H2) $f'(x^*) \neq 0$

(C) Si on définit une suite $(x_n)_n$ tel que $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Alors pour un x_0 suffisament proche de x^*, la suite $(x_n)_n$ converge quadratiquement vers x^*

37 Prop :

(H1) $f \in \mathcal{D}^2(I)$

(H2) f convexe

(H3) $f'(x^*) \neq 0$

(C) $\forall x_0 \geqslant x^*$, la suite $(x_n)_n$ défini dans le théorème 36 converge quadratiquement vers x^*.

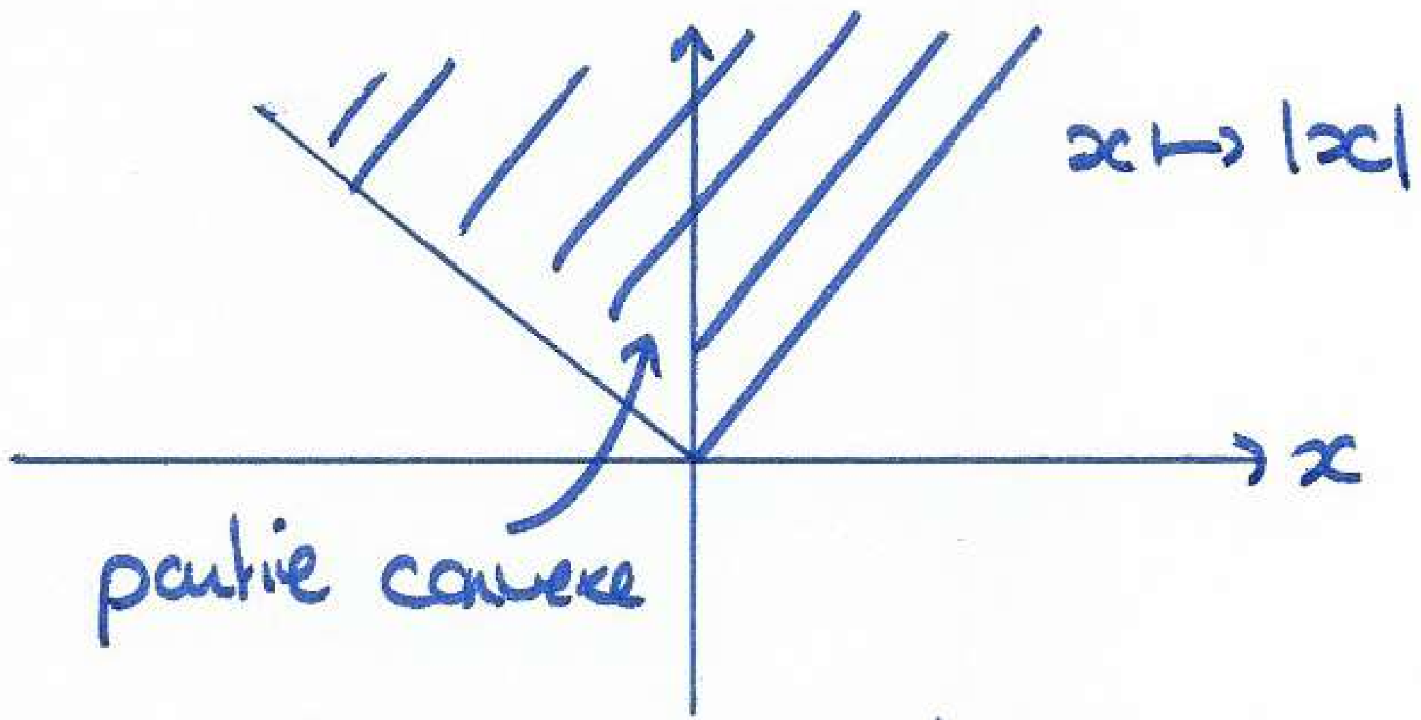
(cf annexe)

Référence :

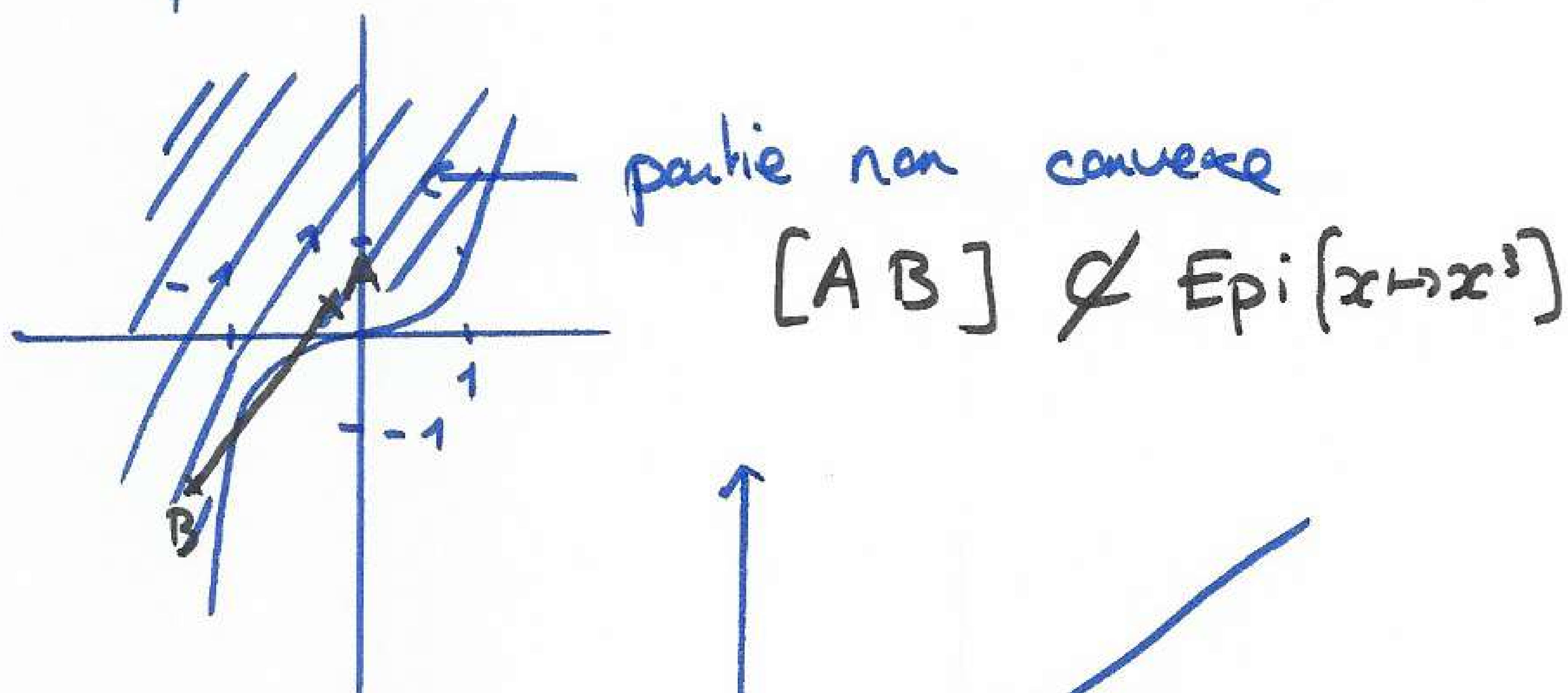
[Gourdon] Analyse
[Rouvière] Petit guide du calcul diff
[Rudin] Principe d'analyse mathématique
[Komornik] Précis d'analyse réelle
[Chauvet] L'essentiel du programme de l'agreg de maths
[Devulder-Rabaux] Leçons pour l'agreg de maths.

ANNEXE :

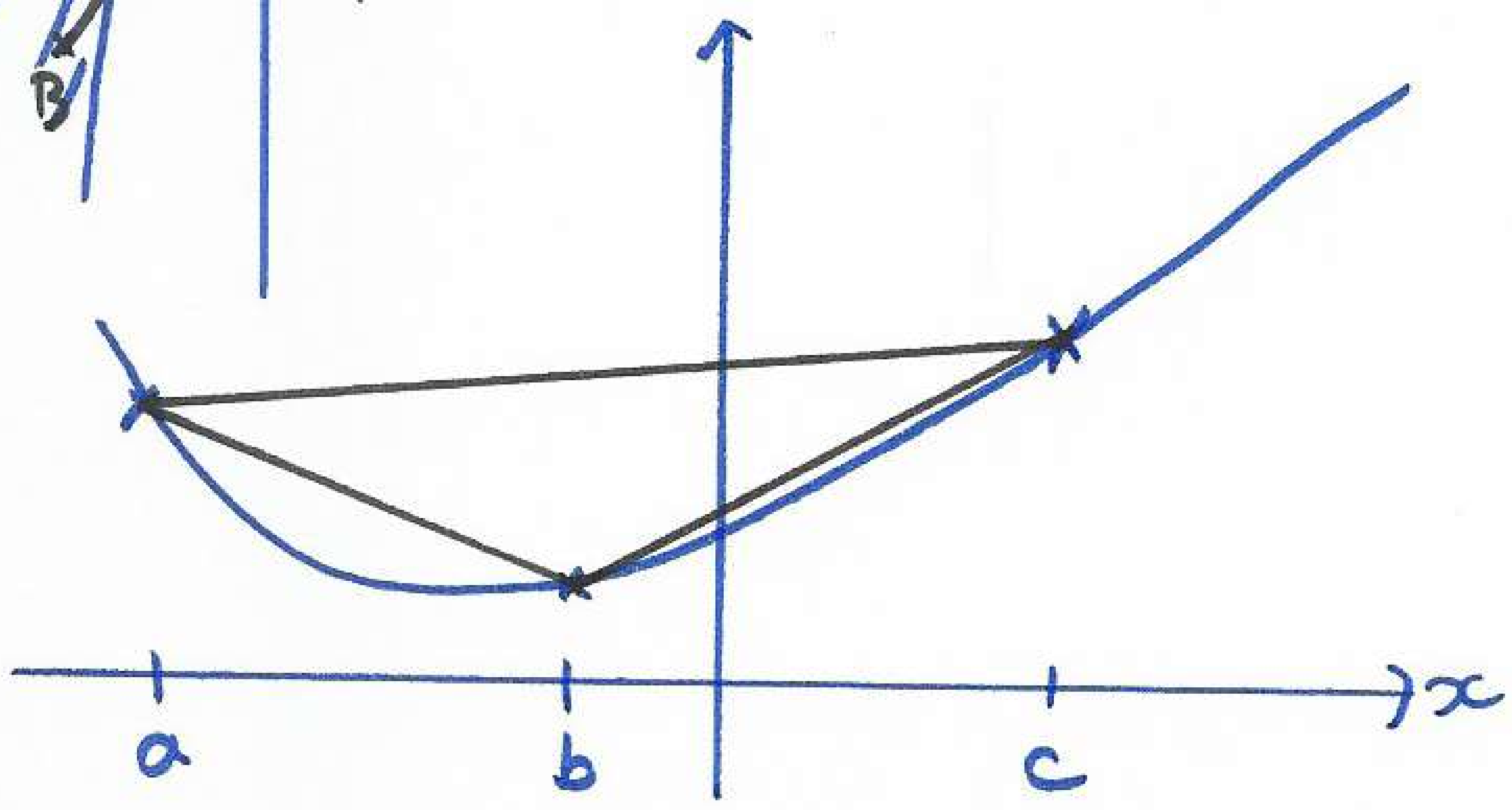
13 exple :



14 contre-exple :



15 Lemme des 3 cordes :



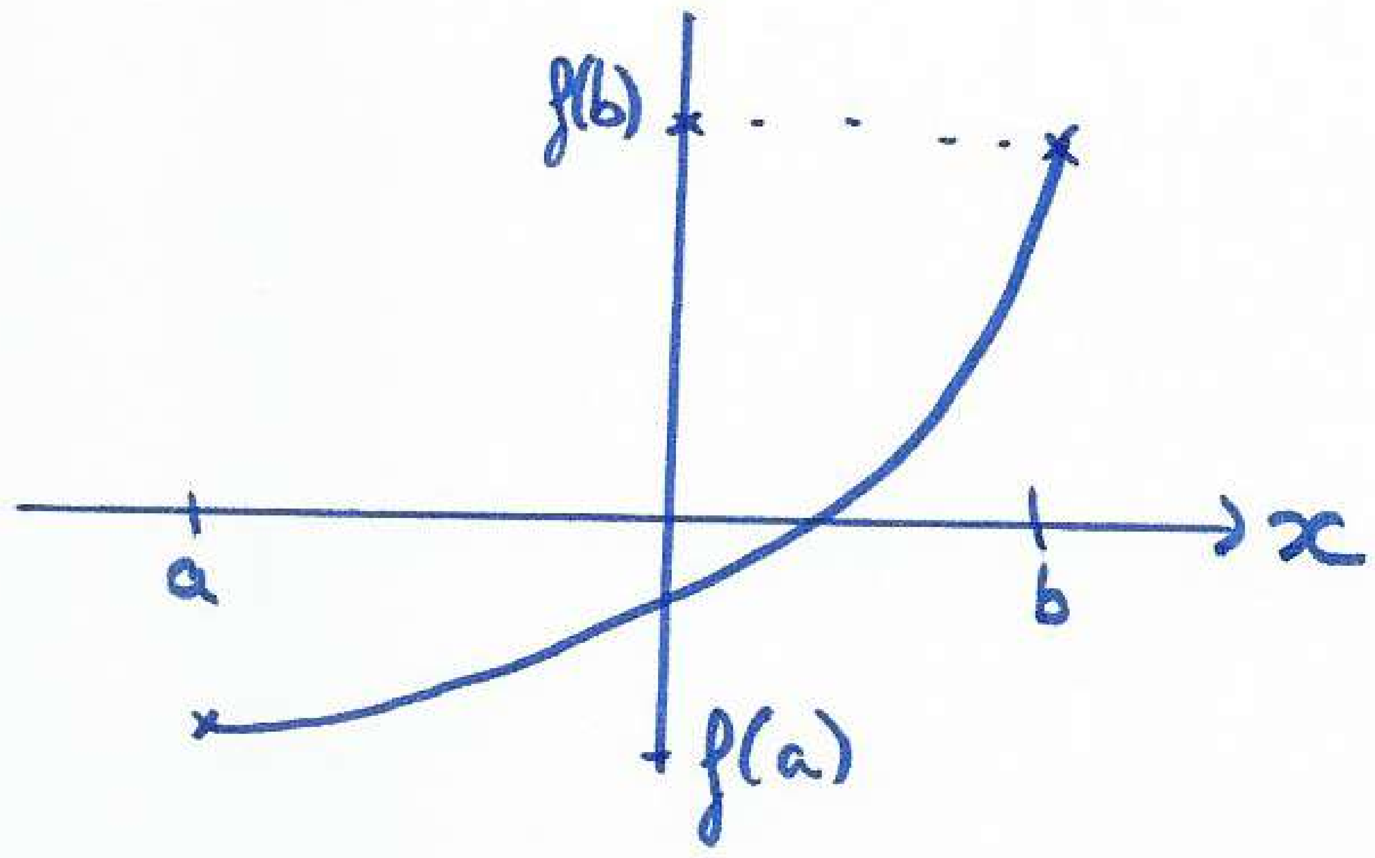
23 Prop fonction monotone

f croissante

$I = [a,b]$

$f(I) = [f(a), f(b)]$

f continue



Méthode de Newton :