250 — Transformation de Fourier. Applications

Def 1 Soit $p \in [1, +\infty[$,
$f \in L^p(\mathbb{R}) \iff \|f\|_p < +\infty$
$\iff (\int |f|^p d\lambda)^{1/p} < +\infty$

I] Sur l'espace L^1 :

1) Entrée en matière

Def 2 Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit sa transformée de Fourier ainsi :
$$\mathcal{F}(f) : \xi \longmapsto \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-it\xi} dt$$
(notée aussi $\hat{f}$)

Rmq 3 Bien définit car $|f(t)e^{-it\xi}| \leq |f(t)|$

Exple 4 : Soit $a > 0$

(i) $\mathcal{F}[\mathbb{1}_{[-a,a]}(t)](\xi) = \dfrac{2\sin(a\xi)}{\xi}$

(ii) $\mathcal{F}[e^{-a|t|}](\xi) = \dfrac{2a}{a^2+\xi^2}$

(iii) $\mathcal{F}\left[\dfrac{a}{a^2+t^2}\right](\xi) = \pi e^{-a|\xi|}$

(iv) $\mathcal{F}[e^{-at^2}](\xi) = \sqrt{\dfrac{\pi}{a}} \exp\left[-\dfrac{|\xi|^2}{4a}\right]$

Prop 5 [Riemann-Lebesgue]. Soit $f \in L^1$
Alors $|\hat{f}(\xi)| \xrightarrow[\xi \to \pm\infty]{} 0$

Prop 6 L'application $\mathcal{F}$ est linéaire de $L^1(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$
où $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}) = \{ f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ qui s'annule en l'infini $\}$

2) Propriétés remarquables :

Def 7 [Convolution]
$$(f * g)(y) = \int_{\mathbb{R}} f(y-x) g(x)\, dx$$

Prop 8 : Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, alors $f*g \in L^1(\mathbb{R})$ et $\widehat{f*g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$

Cor 9 L'anneau L^1 n'admet pas d'unité pour la convolution.

Thme 10 Soit $f \in L^1$, $\alpha, \lambda \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$

(i) Si $g(x) = f(x)e^{i\alpha x}$, $\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi - \alpha)$

(ii) Si $g(x) = f(x-\alpha)$, $\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi) e^{-i\alpha\xi}$

(iii) Si $g(x) = f\left(\frac{x}{\lambda}\right)$, $\hat{g}(\xi) = \lambda \hat{f}(\lambda\xi)$

(iv) Si $g(x) = -ixf(x)$ et si $g \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f}$ est différentiable et $\hat{g}(\xi) = \hat{f}'(\xi)$

Prop 11 : Soit $f, g \in L^1$ telle que $fg \in L^1$, $\hat{f} \in L^1$ et $\hat{g} \in L^1$.
Alors $\widehat{fg} = \dfrac{1}{2\pi}[\hat{f} * \hat{g}]$

Prop 12 : Si $x^k f \in L^1$ pour $k = 0, \dots, n$, alors $\mathcal{F}$ est n fois dérivable et
$$\partial^n(\mathcal{F}f) = (-i)^n \mathcal{F}(x^n f)$$

Prop 13 : Si $f \in \mathcal{C}^n \cap L^1$ et les $f^{(k)}$ sont intégrables $\forall k \in [\![0, n]\!]$, alors $\widehat{f^{(k)}}(\xi) = (i\xi)^k \hat{f}(\xi)$, d'où
$$\hat{f}(\xi) \underset{\xi \to \pm\infty}{=} O\left(\frac{1}{|\xi|^k}\right)$$

Rmq 14 (i) "Plus f décroit vite vers 0 en $\pm\infty$, plus $\hat{f}$ est régulière" (prop 12)
(ii) "Plus f est régulière, plus $\hat{f}$ décroit vite vers 0 en $\pm\infty$" (prop 13)

3) Inversion de la transformée de Fourier :

Def 15 : $I := \{ f \in L^1(\mathbb{R}) / \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}) \}$

Thme 16 [Inversion] Soit $f \in I$, $x \in \mathbb{R}$
$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$ Et donc
$$f \circ \check{Id} = \mathcal{F}\mathcal{F}f \quad \text{où } \check{Id} : x \mapsto -x$$

Cor 17 : L'application $\mathcal{F}$ est injective.

Application :

Def. (18) Soit I intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle fonction poids une fonction $\rho : I \to \mathbb{R}$ mesurable positive et tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_{\mathbb{R}} |x|^n \rho(x)dx < +\infty$.

On note $L^2(I,\rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité ρ (c'est un Hilbert)

Prop (19) : Soient I intervalle et ρ une fonction de poids. Alors il existe $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormale de $L^2(I,\rho)$

Rappel (20) : Dans H Hilbert, soit $A \subset H$, $\mathrm{Vect}(A)$ est dense dans H $\Leftrightarrow A^\perp = \{0\}$

Rappel (21) : Le produit scalaire associée à $L^2(I,\rho)$ est :
$\langle f,g\rangle_{L^2(I,\rho)} = \int_I f(x)g(x)\rho(x)dx$ DVP 1

Thme (22) : Soient I intervalle de $\mathbb{R}$, et ρ une fonction poids. On suppose qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)dx < +\infty$. Alors la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la prop (19) forme une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$.

II] Extension de la transformation de Fourier :

(1) Sur L^2 [Fourier-Plancherel] :

Thme (23) (admis) $I \subset L^2(\mathbb{R})$ et même, I est dense dans $L^2(\mathbb{R})$

Lemme (24) Soit $f, g \in I^2$, alors
$\int_{\mathbb{R}} f\bar{g}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}\,\overline{\hat{g}}\,dx$ où
$\bar{g}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{itx} g(t)\,dt$.

Thme [Plancherel] (25) (admis) :
Il existe une unique application $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ qui prolonge continûment $\mathcal{F}_{|I}$ à L^2. De plus, $\frac{\mathcal{F}}{\sqrt{2\pi}}$ est une isométrie (surjective) et $\mathcal{F}^2(f) = 2\pi \check{f}$ où $\check{f}(x) = f(-x)$

Exple (26) (cf exple (16)) Soit $a > 0$, $f(t) = \mathbb{1}_{[-a,a]}(t)$. On sait que $\mathcal{F}(f)(\xi) = \frac{2\sin(a\xi)}{\xi}$. La fonction $g : x \mapsto \frac{2\sin(ax)}{x} \in L^2(\mathbb{R})$ mais n'est pas dans $L^1(\mathbb{R})$. Sa transformée est donnée par :
$\mathcal{F}(g)(x) = \mathcal{F}^2(f)(x) = f(-x) = \mathbb{1}_{[a,a]}(x)$

(2) Espace de Schwartz :

Def (27) $S(\mathbb{R}) = \{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}),\ \forall p, q \in \mathbb{N},\ \exists C_{pq} > 0,\ |x^p f^{(q)}(x)| \leq C_{pq}\ \forall x \in \mathbb{R} \}$

Exple (28) $x \mapsto e^{-x^2} \in S(\mathbb{R})$

C-exple (29) Soit $k \in \mathbb{N}^*$,
$x \mapsto \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^k \notin S(\mathbb{R})$

Rmq (30) : Si $f \in S(\mathbb{R})$, alors $f^{(k)} \in S(\mathbb{R})$ et $x^k f \in S(\mathbb{R})$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Thme (31) Si $f \in S(\mathbb{R})$, $\hat{f} \in S(\mathbb{R})$ (où $\hat{f}$ est défini comme sur L^1)

Appli (32) Puisque $x \mapsto e^{-x^2} \in S(\mathbb{R})$, et que $\mathcal{F}[e^{-x^2}]'(t) = -\frac{1}{2}t\,\mathcal{F}[e^{-x^2}]$, on obtient que $\mathcal{F}[e^{-x^2}](t) = \sqrt{\pi}\exp\left(\frac{-t^2}{4}\right)$

Thme (33) La transformation de Fourier est un automorphisme sur l'espace de Schwartz.
Si $f \in S(\mathbb{R})$, $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{itx}\hat{f}(t)\,dt$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Thme (34) Si $f, g \in S(\mathbb{R})$,
$\int_{\mathbb{R}} f(x)\hat{g}(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t)g(t)\,dt$

Cor (35) : Si $f, g \in S(\mathbb{R})$,
$\int_{\mathbb{R}} f(x)\bar{g}(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t)\,\overline{\hat{g}}(t)\,dt$
où $\bar{g}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{itx} g(t)\,dt$.

Rmq (36) On en déduit que

$$2\pi \|f\|_2^2 = \|\hat{f}\|_2^2$$

III] Application : Probabilité

Def (37) On appelle fonction caractéristique de la variable aléatoire X la fonction $\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$, $t \in \mathbb{R}$

Prop (38) : Si X admet une densité f, alors $\varphi_X(t) = \hat{f}(-t)$

Thme (39) La fonction caractéristique défini la loi

Rappel (40) (i) Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors la fonction de densité associée à X est :

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(t-\mu)^2}{\sigma^2}\right]$$

(ii) Si $X \sim \mathcal{C}(a,b)$, alors la fonction de densité associée à X est :

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \times \frac{b}{(t-a)^2 + b^2}$$

Lemme (41) $\int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{-u^2}{2}\right) du = \sqrt{2\pi}$

DVP 2

$\boxed{\text{Thme (42) (i) Si } Y \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2) \text{, alors } \varphi_Y(t) = \exp(i\mu t)\exp\left[-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right] \text{ (ii) Si } Y \sim \mathcal{C}(a,b) \text{, alors } \varphi_Y(t) = \exp[iat]\exp[-b|t|]}$

Def (43) Soient $(X_n)_n$, X des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que $X_n \xrightarrow[n\infty]{\mathcal{L}} X$ "converge en loi" si $\forall f \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n\infty]{} \mathbb{E}(f(X))$

Thme Levy [admis] (44) : Soient $(X_n)_n$, X des variables aléatoires réelles.

$$X_n \xrightarrow[n\infty]{\mathcal{L}} X \iff \varphi_{X_n} \xrightarrow[n\infty]{CVS} \varphi_X$$

~~CV~~S : "converge simplement"

Application :

Thme Central-limite (45) Soit X une var dans L^2, $\mu = \mathbb{E}(X)$ et $\sigma^2 = V(X) > 0$. Si $(X_n)_n$ est un échantillon de X et $S_n = X_1 + \dots + X_n$, alors on a

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Prop (46) (admis) : Soient X, Y deux variables aléatoires réelles. Alors X et Y sont indépendants $\iff$

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t)$$

Cor (47) : (i) La somme de deux va gaussienne indep est une va. gaussienne
(ii) La somme de deux va de Cauchy indep est une va de Cauchy.

Référence :

[1] Rudin "analyse réelle et complexe"
[2] Drevetou/LRabeuz "leçons pour l'agregation de mathématiques"
[3] Isenman/Pecatte "l'oral à l'agregation de mathématiques"
[4] Beck/Malick/Peyré "obj. agreg"
[5] Queffélec/Zuily "analyse pour l'agrégation"