171 — FORMES QUADRATIQUES RÉELLES CONIQUES EXEMPES ET APPLICATIONS

E est un $\mathbb{R}$-ev de dimension n

I) Généralités :

1) Formes bilinéaires et formes quadratiques

Def 1 : Une forme bilinéaire (FB) est une application $b : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $\forall (x,y) \in E^2$, $z \longmapsto b(z,y)$ et $z \longmapsto b(x,z)$ sont linéaires.

Si de plus $b(x,y) = b(y,x)$, alors elle est symétrique (FBS)

Exple 2 : $\forall (l_1, l_2)$ des formes linéaires sur E, $(x,y) \longmapsto l_1(x) l_2(y)$ est une FB

Def 3 Une forme quadratique (FQ) est une application $q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $\exists b$ FBS et $q(x) = b(x,x)$ $\forall x \in E$

Prop 4 : Soit q une FQ sur E, $\exists !$ FBS $\tilde{b}_q$ tel que $\forall x \in E$, $q(x) = \tilde{b}_q(x,x)$. Elle est donnée par :
$\tilde{b}_q(x,y) = \frac{1}{2}\left[q(x+y) - q(x) - q(y)\right]$

Def 5 : On appelle forme polaire de q la FBS $\tilde{b}_q$

Exple 6 : Si $b(x,y) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j$, alors la FQ est donnée par :
$$q(x) = \sum a_{ii} x_i^2 + \sum_{i<j} (a_{ij} + a_{ji}) x_i x_j$$

Exple 7 : $q : M \longmapsto \mathrm{Tr}(M^2)$ est une FQ et $\tilde{b}_q(M,N) = \mathrm{Tr}(MN)$

Def 8 : Soit q une FQ. Le cône isotrope est $C_q = \{x \in E \,/\, q(x) = 0\}$

On dit que q est définie si $C_q = \{0\}$

2) Point de vue matricielle :

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E

Def 9 : La matrice d'une FB b dans la base $\mathcal{B}$ est donnée par $M_{\mathcal{B}} = (b(e_i, e_j))_{i,j}$

C'est aussi la matrice de la FQ q associée (si b symétrique)

Exple 10 : $E = \mathbb{R}^3$ et $q(x,y,z) = 3x^2 + y^2 + 6xz$

Si $\mathcal{B}_0$ est la base canonique de E,
$$M_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Thme 11 : Soit b une FB sur E et $M_{\mathcal{B}}$ sa matrice dans la base $\mathcal{B}$. En notant X, Y les vecteurs colonnes des coordonnés de x, y dans la base $\mathcal{B}$, on a que $\forall (x,y) \in E^2$, $b(x,y) = {}^tX M_{\mathcal{B}} Y$

Def-Prop 12 : Le discriminant de q dans la base $\mathcal{B}$ est la classe de $\det(M_{\mathcal{B}})$ dans $\mathbb{R}/(\mathbb{R}^\times)^2$. Il ne dépend pas du choix de la base, et sera noté $\Delta(q)$.

3) Noyau, rang et orthogonalité

Def 13 : Soit $(x,y) \in E^2$. Alors x et y sont orthogonaux pour b une FB si $b(x,y) = 0$.

Def 14 : Le noyau de q FQ est :
$\mathrm{Ker}\, q = E^{\perp} := \{x \in E \,/\, \forall y \in E, \tilde{b}_q(x,y) = 0\}$
On dit que q est non dégénérée si $\mathrm{Ker}(q) = \{0\}$.

Rmq 15 : Si q est dégénérée, $\Delta(q) = 0$

Prop 16 : On a $\mathrm{Ker}(q) \subset C_q$. Ainsi si q est définie, q est non dégénérée.

Contre-exple 17 : La réciproque est fausse : la FQ $q((x,y)) = x^2 - y^2$ sur $E = \mathbb{R}^2$ est non-dégénérée mais n'est pas défini car $\forall x \in E$, $q((x,x)) = q((x,-x)) = 0$.

Prop 18 : En identifiant $x \in E$ à X comme dans le théorème 11, on a que $\mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Ker}(M_{\mathcal{B}})$

Def 19 : Le rang de q (ou de $\tilde{b}_q$) est l'entier $\mathrm{rg}(q) = n - \dim \mathrm{Ker}(q)$

Def 20 : $\mathcal{B}$ une base de E est b-orthogonale si $\forall (e_i, e_j) \in \mathcal{B}^2$, $e_i \neq e_j \Rightarrow b(e_i, e_j) = 0$

II Réduction :

1 Méthode de Gauss

Thme 21 : Pour toute FQ q non nulle sur E, $\exists R \in [\![1,n]\!]$, des scalaires non nuls, $(\lambda_i)_{1\leq i\leq R}$ et des formes linéaires $(\ell_i)_{1\leq i\leq R}$ linéairement indeps dans E^* tel que $\forall x\in E$, $q(x)=\sum_{j=1}^{R}\lambda_j \ell_j^2(x)$

Rmq 22 : Puisque $\lambda_i \in \mathbb{R}\ \forall i$, alors $\exists\, \omega_i\in\mathbb{R}$ tel que $\lambda_i = \pm\omega_i^2$. Ainsi $\ell_i^2(x)$ devient $(\omega_i \ell_i^2(x))$ et en ordonnant les termes, $q(x) \underset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{p}\ell_i^2(x) - \sum_{i=p+1}^{s}\ell_i^2(x)$ où $p+s=R$.

Exple 23 : $q_1(x,y,z,t) = xy+yz+zt+tx$
$= \frac{1}{4}(x+y+z+t)^2 - \frac{1}{4}(x+y-z-t)^2$

$q_2(x,y,z) = x^2-2y^2+xz+yz$
$= (x+\frac{1}{2}z)^2 - 2(y-\frac{1}{4}z)^2 - \frac{1}{8}z^2$

$q_3(x,y,z) = x^2+2y^2+z^2+2xy$
$= (x+y)^2+y^2+z^2$

Rmq 24 : R correspond au rang de q
Ainsi $\mathrm{rg}(q_1)=2$, $\mathrm{rg}(q_2)=3$, $\mathrm{rg}(q_3)=3$

2 Sylvester :

Thme 25 : Soit q une FQ qui admet $(*)$ comme décomposition (ds la rmq 22) avec $p+s=R$. Alors pour n'importe quelle autre décomposition de la forme : $q(x)=g_1(x)^2+\dots+g_{p'}(x)^2-g_{p'+1}^2(x)-\dots - g_{p'+s'}^2(x)$, Alors on a $p=p'$ et $s=s'$.

Def 26 : Le couple (p,s) est la signature de q, noté $\mathrm{ssg}(q)$

Def 27 : Soit q une FQ, on note $(i,j)=\mathrm{ssg}(q)$
Si $j=0$ et $i\in[\![1,n]\!]$, q est positive
Si $i=0$ et $j\in[\![1,n]\!]$, q est négative

Exple 28 : $\mathrm{ssg}(q_1)=(1,1)$
$\mathrm{ssg}(q_2)=(1,2)$
$\mathrm{ssg}(q_3)=(3,0) \Leftarrow q_3$ est def positive.

Rmq 28 : Si q est positive, $q(E)\subset\mathbb{R}^+$
Si q est négative, $q(E)\subset\mathbb{R}^-$

Prop 29 : Si q est positive, $M_B\in S_n^+(\mathbb{R})$
Si q est négative, $M_B\in S_n^-(\mathbb{R})$
Si q est def pos, $M_B\in S_n^{++}(\mathbb{R})$ (resp neg)

Cor 30 : Si $A\in S_n(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{Rg}(A)=R$ et $(p,s)=\mathrm{ssg}(q)$ la FQ associée. Alors $\exists P\in GL_n(\mathbb{R})$ tq

$$A = {}^tP\begin{pmatrix} I_p & & 0\\ & -I_s & \\ 0 & & O_{n-R}\end{pmatrix}P$$

3 Diagonalisation :

Thme 31 [Thme spectral] Soit $A\in S_n(\mathbb{R})$. Alors $\exists P\in O_n(\mathbb{R})$ et D diagonale tel que $A=PDP^{-1}$

Appli 32 : La matrice laplacienne A tel que $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0\\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1\\ 0 & & -1 & 2\end{pmatrix}\in S_n(\mathbb{R})$ et donc est diagonalisable

Thme 33 [orthogonalisation simultanée] Soient q_1, q_2 deux FQs tel que q_1 est définie positive. Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E qui est orthonormale pour q_1 et orthogonale pour q_2.

Rmq 34 : q_1 étant définie positive, q_1 est non-dégénérée et positive. Ainsi b_{q_1} définie un produit scalaire sur E, rendant E euclidien

III Application 1 : différentielle seconde

1 Introduction :

Soit $f: U\subset\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable

Rappel 35 : Soit $a\in U$, alors
$Df(a)\in\mathcal{L}_c(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, d'où
$Df: U\mapsto \mathcal{L}_c(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ et
$Df(a).h = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a).(h)_i = \mathrm{Jac}(a).H$
où $\mathrm{Jac}(a)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et $H=\begin{pmatrix}h_1\\ \vdots\\ h_n\end{pmatrix}$

Et $D^2f(a): \mathbb{R}^n\longrightarrow\mathcal{L}_c(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$
Soit $h_1,h_2\in\mathbb{R}^n$
$D^2f(a).(h_1,h_2) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)(h_1)_i(h_2)_j$
$= {}^tH_1\,\mathrm{Hess}f(a)\,H_2$
où $\mathrm{Hess}f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right)_{i,j\in[\![1,n]\!]^2}$

Prop [Schwarz] **36** Si $f\in\mathcal{C}^2$, $\forall a\in U$, $\mathrm{Hess}f(a)\in S_n(\mathbb{R})$ et donc $D^2f(a)$ définie une FBS.

Prop 37 [Formule de Taylor avec reste intégral]
Soit $f:U\subset\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^{k+1}$ où U ouvert, $k\in\mathbb{N}^*$. Soit $a\in U$, $h\in\mathbb{R}^n$ tel que $a+h\in U$, alors on a :

$$f(a+h)=f(a)+\sum_{i=1}^{k} \frac{D^i f(a)}{k!}(h^i)+\int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} D^{k+1}f(a+th)(h^{k+1})\,dt$$

Rmq 38 : Pour $i=2$, $D^2 f(a)(h,h)$ s'identifie à une forme quadratique.

2 Lemme de Morse

DVP 1

Lemme 39 : Soit $A_0 \in S_n(\mathbb{R}) \cap Gl_n(\mathbb{R})$. Alors $\exists$ V voisinage de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$ et une application $\rho : V \to Gl_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $\forall A \in V$, $A = {}^t\rho(A) A_0 \rho(A)$

Thme 40 [Lemme de Morse] : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^3$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine. On suppose que $Df(0)=0$ et $D^2f(0)$ est non-dégénérée de signature $(p, n-p)$. Alors $\exists$ un difféomorphisme $x \mapsto u = \varphi(x)$ entre deux voisinages de l'origine de $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $\varphi(0)=0$ et $f(x)-f(0)=u_1^2+\dots+u_p^2-u_{p+1}^2-\dots-u_n^2$

3 Point de vue géométrique

Rmq 41 : Soit a un point critique de f
- Si $\mathrm{Hess} f(a)$ est déf. pos, a est un min local
- Si $\mathrm{sg}(\mathrm{Hess} f(a))=(i,j)$ où $i\neq 0$ et $j \neq 0$, a est un point selle (ou point col)

IV Application 2 : les coniques

1 Différentes définitions

Def 43 [Algébrique] Soient a,b,c,d,e,f des réels non tous nuls et $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$$\varphi(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey+f = q(x,y)+\ell(x,y)+f$$
Alors une conique est $C_\varphi = \{(x,y) / \varphi(x,y)=0\}$

Def 44 [polynôme homogénéisé] : Soit φ tel que dans la def 43. Son polynôme homogénéisé est la FQ sur $\mathbb{R}^3$:
$$Q_\varphi(x,y,z)=q(x,y)+\ell(x,y)z+fz^2$$

Rmq 45 : On a que une conique est l'intersection d'un plan avec un cône de révolution, car $C_\varphi=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / \{z=1\} \cap \{Q_\varphi(x,y,z)=0\}\}$

Def 46 (En coordonnée barycentrique) : Soit A,B,C trois points non alignés dans $\mathbb{R}^2$, alors en notant (X,Y,Z) les coordonnées barycentriques de $M\in\mathbb{R}^2$. On note $Q(X,Y,Z)=aX^2+bY^2+cZ^2+pXY+qXZ+rYZ$
Alors la conique est définie par $C=\{M\in\mathbb{R}^2 / Q(X,Y,Z)=0\}$.

2 Théorème de Pascal :

DVP 2

Thme 47 [Par 5 points passe une conique] : Par 5 points distincts passe une conique. Si $\nexists$ 4 points alignés, la conique est unique. Si la conique est unique : elle est dégénérée $\Leftrightarrow$ $\exists$ 3 points alignés.

3 Classification : avec la def 43

Lemme 48 : $\exists$ base orthogonale pour q et pour $\langle .,. \rangle$ tel que l'équation de la conique devient : $\alpha X^2+\beta Y^2-2\gamma X-2\delta Y=k$

a $\tilde{q}$ non-dégénérée : $\tilde{q}$

Lemme 46 $\alpha\beta\neq0$ et donc l'équation devient $\alpha x^2+\beta y^2=h$ $\quad x=X-\frac{\gamma}{\alpha}$, $y=Y-\frac{\delta}{\beta}$

Thme 47 : Si $\mathrm{sg}(\tilde{q})=(2,0)$
- (i) Si $h=0$, C_φ est un point
- (ii) Si $h<0$, $C_\varphi=\emptyset$
- (iii) Si $h>0$, C_φ est une ellipse

Si $\mathrm{sg}(\tilde{q})=(1,1)$ on supp $b<0$:
- (i) Si $h\neq0$, C_φ est une hyperbole
- (ii) Si $h=0$, $C_\varphi=D_1\cup D_2$ droites sécantes

b $\tilde{q}$ dégénérée :

Lemme 48 : Supposons que $b=0$, l'équation devient : $\alpha(X-\frac{\gamma}{\alpha})^2-2\delta Y=h$

Thme 49 (i) Si $\delta\neq0$, alors on a $y=ax^2$ et C_φ est une parabole
(ii) Si $\delta=0$, alors on a $x^2=\frac{h}{\alpha}$
si $h<0$, $C_\varphi=\emptyset$
sinon $C_\varphi=D_1\cup D_2$ où $D_1 \parallel D_2$.

Références :

Gourdon	Algèbre
Rombaldi	Maths pour l'agreg
Rouvière	Petit guide du calcul diff
Eiden	Géométrie analytique classique
Dre - Lra	Leçons pour l'agreg
Ise - Pecq	L'oral à l'agreg de maths