265 : Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales

Pandou

5 juin 2022

1 La fonction exponentielle

1.1 Définition et propriétés

Théorème-Définition 1. *La série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$ *converge absolument pour tout* $z \in \mathbb{C}$. *On note* $\exp(z)$ *la somme.*

Proposition 2. *La fonction* exp *est entière et* $\exp' = \exp$. *De plus, on a*

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, \exp(z+z') = \exp(z)\exp(z')$$

Corollaire 3.

$$\forall z \in \mathbb{C}, \exp(z) \neq 0 \qquad et \qquad \exp(z)^{-1} = \exp(-z)$$

Théorème 4. *La fonction* $f : t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{it} \in \mathbb{S}^1$ *est un morphisme de groupes surjectif. On note* π *l'unique réel positif tel que* 2π *est le générateur positif de* $\mathrm{Ker}(f)$.

Corollaire 5. *La fonction* $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ *est un morphisme de groupes surjectif qui est* $2i\pi$*-périodique.*

Corollaire 6. *Pour tout* $z \neq 0$, *il existe un couple* $(\rho, \theta) \in]0, +\infty[\times\mathbb{R}$ *tel que* $z = \rho e^{i\theta}$. *Le nombre* θ *est appelé un argument de* z.

Théorème 7. *La fonction* $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ *est un homéomorphisme strictement croissant et convexe. En particulier, on a*

$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0 \qquad et \qquad \lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$$

Corollaire 8.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) \geqslant 1 + x$$

Théorème 9 (Croissances comparées)**.**

$$\lim_{x\to-\infty} x^n \exp(x) = 0 \qquad et \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = +\infty$$

1.2 Fonctions trigonométriques circulaires et hyperboliques

Définition 10. *Soit* $t \in \mathbb{R}$, *on définit*

$$\cos(t) = \mathrm{Re}\big(\exp(it)\big) \qquad et \qquad \sin(t) = \mathrm{Im}\big(\exp(it)\big)$$

Proposition 11. *On a pour tout* $t \in \mathbb{R}$,

$$\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \qquad , \sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \qquad et \qquad \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$$

En particulier, cos *et* sin *sont des fonctions* 2π*-périodiques.* cos *est paire,* sin *est impaire et*

$$e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$$

Application 12 : Ces deux dernières formules permettent de “linéariser” les expressions de la forme $\cos^m(x)\sin^n(x)$ afin de calculer leur intégrale.

Remarque 13 : Plus généralement, on peut définir pour $z \in \mathbb{C}$:

$$\cos(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2i}$$

Proposition 14. *Soit* $a, b \in \mathbb{R}$, *on a*

1. $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.
2. $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$.
3. $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$.
4. $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$.

Proposition 15. cos *et* sin *sont dérivables sur* $\mathbb{R}$ *et,*

$$\cos' = -\sin \qquad et \qquad \sin' = \cos$$

Proposition 16.

$$\cos(t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} \qquad et \qquad \sin(t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Définition 17. *Pour $t \in \mathbb{R}$, on définit*

$$\mathrm{ch}(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \qquad \textit{et} \qquad \mathrm{sh}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

Proposition 18. ch *et* sh *sont respectivement paire et impaire. De plus, on a* $\mathrm{ch}(t)^2 - \mathrm{sh}(t)^2 = 1$.

Remarque 19 : On a $\mathrm{ch}(t) = \cos(it)$ et $\mathrm{sh}(x) = -i\sin(ix)$.

Proposition 20. *Soit $a, b \in \mathbb{R}$, on a*

1. $\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b)$.
2. $\mathrm{ch}(a-b) = \mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b) - \mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b)$.
3. $\mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{sh}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(b)\mathrm{ch}(a)$.
4. $\mathrm{sh}(a-b) = \mathrm{sh}(a)\mathrm{ch}(b) - \mathrm{sh}(b)\mathrm{ch}(a)$.

Proposition 21. ch *et* sh *sont dérivables sur* $\mathbb{R}$ *et* $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$ *et* $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$.

Proposition 22.

$$\mathrm{ch}(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \qquad \textit{et} \qquad \mathrm{sh}(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Application 23 : $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}(x) \leqslant \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)$.

1.3 Réciproques

Définition 24. *Le logarithme népérien est l'application réciproque de* $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, *notée* ln.

Proposition 25. ln *est un* $\mathcal{C}^\infty$*-difféomorphisme de groupes croissant et concave entre* $\mathbb{R}_+^*$ *et* $\mathbb{R}$ *et*

$$\forall x > 0, \ln'(x) = \frac{1}{x} \qquad \textit{et} \qquad \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$

Théorème 26. *Si $|x| < 1$, on a*

$$\ln(1+x) = \sum_{n \geqslant 1} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

Théorème-Définition 27. sin *est un homéomorphisme croissant entre* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *et* $[0,1]$, *on note* arcsin *sa fonction réciproque.*
cos *est un homéomorphisme décroissant entre* $[0, \pi]$ *et* $[0,1]$, *on note* arccos *sa fonction réciproque.*

Proposition 28. arcsin *et* arccos *sont dérivables sur* $]0,1[$ *et*

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \textit{et} \qquad \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

DEVELOPPEMENT 1

Application 29 : Si $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$, on définit

$$I(f) : x \in]0,1] \longmapsto \sqrt{\frac{x}{\pi}} \int_0^1 \frac{f(ux)}{\sqrt{1-u}} \mathrm{d}u$$

Alors, I un opérateur continu de $\mathcal{C}^0([0,1])$ tel que

$$\forall x \in [0,1], I \circ I(f)(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

Théorème-Définition 30. sh *est un homéomorphisme croissant de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$, *on note* argsh *sa fonction réciproque.*
ch *est un homéomorphisme croissant de* $[0, +\infty[$ *dans* $[1, +\infty[$, *on note* argch *sa fonction réciproque.*

Proposition 31. argsh *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $\mathrm{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
argch *est dérivable sur* $]1, +\infty[$ *et* $\mathrm{argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

Proposition 32.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{argsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.
2. $\forall x \in [1, +\infty[, \mathrm{argch}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$.

2 Polynômes orthogonaux

2.1 Généralités

Définition 33. *On dit qu'une fonction* $w :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ *est une fonction de poids si w est une fonction continue telle que* $\forall n \in \mathbb{N}, \int_a^b |x|^n w(x)\mathrm{d}x < +\infty$. *On note E l'ensemble des fonctions continues f telles que* $t \longmapsto f(t)^2 w(t)$ *est intégrable sur* $]a,b[$.

Remarque 34 : Quand $]a,b[$ est borné, il suffit de supposer que $\int_a^b w(x)\mathrm{d}x$ converge. Cette hypothèse revient à dire que $\mathbb{R}[X] \subset E$.

Proposition 35. *On définit un produit scalaire sur E en posant* $\langle f, g \rangle_w = \int_a^b f(t)g(t)w(t)\mathrm{d}t$.

Théorème-Définition 36. *Il existe une unique suite de polynômes (P_n) qui forme une famille orthonormée de E telle que pour tout n, $\deg(P_n) = n$ et dont le coefficient dominant est > 0.*

Exemples 37 :

$]a,b[$	$w(t)$	$P_n(t)$	Nom
$]0,+\infty[$	e^{-t}	$e^t \frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(e^{-t}t^n)$	Laguerre
$]-1,1[$	1	$\frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left((1-t^2)\right)^n$	Legendre
$]-1,1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$	$\cos\left(n\arccos(t)\right)$	Tchebychev
$\mathbb{R}$	e^{-t^2}	$(-1)^n e^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}e^{-t^2}$	Hermite

Théorème 38. *Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $P \perp \mathbb{R}_{n-1}[X]$ si, et seulement si, P est proportionnel à P_n.*

Application 39 : Si w est paire, alors la parité de P_n est celle de n.

Théorème 40. *La famille (P_n) satisfait la relation de récurrence d'ordre 2 :*

$$P_{n+1}(X) = (a_nX + b_n)P_n(X) - c_nP_{n-1}(X)$$

où $a_n = \dfrac{p_{n+1}}{p_n}$ où (p_n) est le coefficient dominant de P_n, $b_n = -a_n\langle XP_n, P_n\rangle_w$ et $c_n = \dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ $(c_0 = 0)$.

Proposition 41. *On suppose que $]a,b[$ est borné. Alors,*

1. *La suite (P_n) est totale dans E. On note alors $c_n(f) = \displaystyle\int_a^b f(x)P_n(x)w(x)\mathrm{d}x$.*
2. *Si $f \in E$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)^2w(t)\mathrm{d}t = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n(f)^2$.*

Dans tous les cas, on a $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n(f)^2 \leqslant \int_a^b f(t)^2w(t)\mathrm{d}t$.

Remarque 42 :

- Si $]a,b[$ n'est plus bornée, (P_n) n'est plus forcément totale. Si $w(t) = \exp\left(t^{-\frac{1}{4}}\right)$, $\sin(x^{\frac{1}{4}})$ est orthogonale à $\mathbb{R}[X]$.
- Par contre, les polynômes de Legendre et de Hermite forment bien une famille totale dans E (plus difficile, nous l'admettons).

2.2 Zéros et quadrature de Gauss

Définition 43. *On considère le noyau reproduisant défini par $K_n(x,y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P_k(x)P_k(y)$.*

Proposition 44 (Formule de Christoffel-Darboux)**.** *Soit p_n le coefficient dominant de P_n, on a alors*

$$\forall x \neq y, K_n(x,y) = \frac{p_n}{p_{n+1}}\frac{P_n(y)P_{n+1}(x) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{x-y}$$

et,

$$\forall x, K_n(x,x) = \frac{p_n}{p_{n+1}}\left(P_n(x)P'_{n+1}(x) - P'_n(x)P_{n+1}(X)\right)$$

Remarque 45 : On $\left\langle f, K_n(\cdot,y)\right\rangle_w = f(y)$.

Théorème 46. *Soit $n \geqslant 1$, alors P_n est scindé à racines simples et toutes ses racines sont dans $]a,b[$.*

Théorème 47. *Les zéros de P_n et P_{n+1} sont entrelacés dans $]a,b[$ et P_n et P_{n+1} n'ont aucun zéro commun.*

Théorème 48. *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et w un poids sur $]a,b[$ et $\ell \in \mathbb{N}^*$. Il existe un unique choix de points $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant \ell}$de $]a,b[$ et de coefficients $(\lambda_{j,\ell})$ de sorte que la méthode de quadrature $\displaystyle\int_a^b f(x)w(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{j=0}^{\ell}\lambda_{j,\ell}f(x_j)$ est d'ordre exactement $2\ell+1$, ie on a égalité pour tout $f \in \mathbb{R}_{2\ell+1}[X]$.*
Les points (x_i) sont les racines du $(\ell+1)$-ième polynôme orthogonal pour le poids w et on a $\lambda_{j,\ell} = \displaystyle\int_a^b w(x)\frac{P_n(x)}{(x-x_j)P'_n(x_j)}\mathrm{d}x$.

Exemple 49 : (Méthode de Gauss-Legendre) Si $w(x) = 1$ sur $[a,b] = [-1,1]$. Alors, on a les points et les coefficients suivants :

ℓ	$P_{\ell+1}$	(x_i)	$(\lambda_{j,\ell})$
0	x	0	2
1	$x^2 - \frac{1}{3}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$	1, 1
2	$x^3 - \frac{3}{5}x$	$\pm sqrt\frac{3}{5}, 0$	$\frac{5}{9}, \frac{8}{9}, \frac{5}{9}$
3	$x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}$	$\pm\sqrt{\frac{3}{7} \pm \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\frac{1}{2} \pm \frac{1}{6}\sqrt{\frac{5}{6}}$

Exemple 50 : Si on veut calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x+3}$ avec $w=1$ et $n=2$, on trouve

$$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x+3} \approx \frac{1}{3-\frac{\sqrt{3}}{3}} + \frac{1}{3+\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{9}{13} = 0.6923...$$

que l'on compare avec $\ln(2) = 0.6930...$.

3 Fonction Γ

Définition 51. *Pour* $\mathrm{Re}(z) > 0$, *on définit* $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\mathrm{d}t$.

Proposition 52. *Si* $\mathrm{Re}(z) > 0$, *on a* $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

Théorème 53. Γ *est une fonction holomorphe sur* $\{\mathrm{Re}(z) > 0\}$ *et* $\Gamma'(z) = \int_0^{+\infty} \ln(t)t^{z-1}e^{-t}\mathrm{d}t$.

Proposition 54. *Si* $\mathrm{Re}(z) > 0$, *on a* $\Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\mathrm{d}t$.

Application 55 : En écrivant la même relation mais pour Γ', on trouve $\Gamma'(1) = -\gamma$ où γ est la constante d'Euler.

Application 56 : Si $\mathrm{Re}(z) > 0$, $\Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^z n!}{z(z+1)...(z+n)}$ de sorte qu'on trouve $\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)$.

Lemme 57.

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)} + \int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\mathrm{d}t$$

Théorème 58. Γ *se prolonge en une fonction méromorphe sur* $\mathbb{C}$, *avec des pôles en chaque* $-n, n \in \mathbb{N}$ *et on a*

$$\mathrm{Res}(\Gamma, -n) = \frac{(-1)^n}{n!}$$

4 Fonctions de Bessel

Définition 59. *Soit* $\nu \in \mathbb{R}$, *les fonctions de Bessel (d'ordre* 0*) sont les solutions de l'équation différentielle*

$$xy'' + y' + xy = 0$$

DEVELOPPEMENT 2

Théorème 60. *L'ensemble des solutions développables en série entière de l'équation* $(E) : xy''+y'+xy = 0$ *est une droite vectorielle engendrée par* $J_0(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \frac{x^{2n}}{4^n(n!)^2}$.

Proposition 61. *Il existe une solution de l'équation* (E) *non bornée au voisinage de* 0.

Application 62 :

$$\forall x \in \mathbb{R}, J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

Remarque 63 : Si on note $Y_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x\sin\theta)\mathrm{d}\theta - 2\int_0^{+\infty} e^{-x\mathrm{sh}(\theta)}\mathrm{d}\theta$, alors Y_0 est une solution de l'équation de Bessel et (H_0, Y_0) est un système fondamental de solutions.

Proposition 64. *Les zéros de* J_0 *et* Y_0 *sur* $]0, +\infty[$ *sont simples.*

Lemme 65 (Comparaison de Sturm)**.** *Les solutions de* $y'' + g_i(x)y = 0$ *où* g_i *sont des fonctions continues telles que* $g_1 < g_2$. *Alors, entre deux zéros consécutifs de* y_1, *il y a au moins un zéro de* y_2.

Théorème 66. *En appliquant le lemme précédent à* $\varphi(x) = \sqrt{x}J_0(x)$, *on trouve que la distance entre deux zéros consécutifs de* J_0 *est* $\leqslant \pi$.

Définition 67. *Soit* $\nu \in \mathbb{N}$, *on définit* $J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}$ *l la fonction de Bessel d'ordre* ν.

Proposition 68. J_ν *est l'unique solution développable en série entière sur* $\mathbb{R}$ *de l'équation différentielle* $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$

Corollaire 69.

$$\forall x \in \mathbb{R}, J_\nu(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta - \nu\theta)\mathrm{d}\theta$$

Application 70 : On a $J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix\sin\theta}e^{i\nu\theta}\mathrm{d}\theta$, ce qui donne

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} J_n^2 = 1$$

Références :

- Demailly, Analyse numérique et Équations différentielles.
- Pommellet, Cours d'analyse.
- Rombaldi, Éléments d'analyse réelle.
- Rudin, Analyse réelle et complexe.
- Temme, Special functions, Introduction to Classical Functions of Mathematical Physics.
- Zuily, Quéffelec, Analyse pour l'agrégation.