253 : Utilisation de la notion de convexité en analyse.

Pandou

9 mai 2022

1 Fonctions convexes réelles

1.1 Rappels

Définition 1. *On dit que $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe si*

$$\forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0,1], f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

On dit qu'elle est strictement convexe si l'inégalité précédente est stricte si $x \neq y$ et $\lambda \in]0,1[$.
On dit que f est concave si $-f$ est convexe.

Proposition 2. *La somme de deux fonctions convexes est convexe. La multiplication par un produit scalaire d'une fonction convexe est convexe. La borne supérieure d'une famille de fonctions convexes est convexe.*

Théorème 3. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexes, $x_1, ..., x_n \in I$ et $\lambda_1, ..., \lambda_n \geqslant 0$ de somme 1, alors*

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)\right) \leqslant \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

Théorème 4. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, pour $a \in I$, on note $p_a : x \neq a \longmapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Alors, f est convexe si, et seulement si, pour tout $a \in I$, p_a est croissante.*

Corollaire 5. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.*

1. *Si f est dérivable sur I, alors f est convexe si, et seulement si, f' est croissante sur I.*
2. *Si f est dérivable deux fois sur I, alors f est convexe si, et seulement si, f'' est positive sur I.*

Exemple 6 : ln est concave, exp est strictement convexe. Une fonction à la fois convexe et concave est affine.

1.2 Inégalités de convexité

Exemples 7 :
- $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right], \dfrac{2}{\pi}x \leqslant \sin(x) \leqslant x$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geqslant 1 + x$.

Proposition 8 (Inégalité arithmético-géométrique)**.** *Soit $x_1, ..., x_n \geqslant 0$, alors*

$$\sqrt[n]{x_1 ... x_n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$$

avec égalité si, et seulement si, tous les x_i sont égaux.

Proposition 9 (Inégalité de Young)**.** *Soit $u, v \geqslant 0$ et $p, q > 1$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$, alors*

$$uv \leqslant \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$$

avec égalité si, et seulement si, $u^p = v^q$.

Corollaire 10 (Inégalité de Hölder)**.** *Soit $f \in L^p$ et $g \in L^q$ avec $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, alors $fg \in L^1$ et*

$$\|fg\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}$$

avec égalité si, et seulement si, f et g sont colinéaires presque partout.

Application 11 : (Inégalité de Minkowski) Si $f, g \in L^p$, alors $\|f+g\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$. En particulier, on en déduit que L^p est un espace vectoriel normé.

Théorème 12. *Soit $fI \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe, alors pour $x \in I$, on a*

$$f(x) = \sup\{\varphi(x), \varphi \text{ affine}, \varphi \leqslant g\}$$

Corollaire 13 (Inégalité de Jensen)**.** *Soit f une fonction intégrable et φ une fonction convexe, alors*

$$\varphi\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right) \leqslant \int_0^1 \varphi\big(f(x)\big)\mathrm{d}x$$

Application 14 : Soit $F = \left\{f \in \mathcal{C}^1\big([a,b],\mathbb{R}\big), f(a)=\alpha, f(b)=\beta\right\}$ où $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ fixé. Alors,

$$\forall f \in F, \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\mathrm{d}x \geqslant (b-a)\sqrt{1+m^2} \qquad \text{avec} \qquad m = \frac{\alpha-\beta}{a-b}$$

Géométriquement, le chemin le plus court entre deux points est la ligne droite.

2 Convexité dans les espaces normés de dimension finie

On fixe E un espace euclidien de dimension n.

2.1 Parties convexes et fonctions convexes

Définition 15. *Soit $C \subset E$, on dit que C est convexe si*

$$\forall x,y \in C, [x,y] := \{\lambda x + (1-\lambda)y, \lambda \in [0,1]\} \subset C$$

Exemples 16 :
- Tout sous-espace vectoriel est convexe.
- Toute boule est convexe.
- Toute partie convexe est aussi connexe (par arcs).

Proposition 17. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors, f est convexe si, et seulement si, $\{(x,y), y \geqslant f(x)\}$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.*

Définition 18. *Soit U un ouvert convexe de E et $f : U \longrightarrow E$. On dit que f est convexe si, et seulement si,*

$$\forall x,y \in U, \forall\lambda \in [0,1], f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

Proposition 19. *On suppose que f est différentiable sur U. Alors, f est convexe si, et seulement si,*

$$\forall x,y \in U, f(y) - f(x) \geqslant \big\langle \nabla f(x), y-x\big\rangle$$

Proposition 20. *Si f est deux fois différentiable sur U, alors f est convexe si, et seulement si, $\forall x \in U, \mathrm{d}^2 f(x)$ est une forme quadratique positive.*

Exemple 21 : Si $A \in S_n^+(\mathbb{R})$, alors $x \longmapsto Ax+b$ est une fonction convexe.

Définition 22 (Transformée de Legendre)**.** *Soit $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ non identiquement égale à $+\infty$. On définit la transformée de Legendre de φ par :*

$$\varphi^*(x) = \sup\{\langle y,x\rangle - \varphi(y), y \in E\}$$

Proposition 23. *φ^* est convexe et semi-continue inférieurement, ie $\{\varphi \leqslant \lambda\}$ est un fermé.*

Proposition 24. *On suppose que φ est convexe, semi-continue inférieurement non identiquement égale à $+\infty$, alors φ^* n'est pas identiquement égale à $+\infty$.*

Théorème 25. *Soit φ convexe, semi-continue inférieurement non identiquement égale à $+\infty$, alors*

$$\varphi^{**} = \varphi$$

Exemple 26 : Si $\varphi(x) = \|x\|$, alors $\varphi^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \|x\| \leqslant 1 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$ et on en déduit que

$$\forall x \in E, \|x\| = \sup_{\|y\|\leqslant 1} \langle x,y\rangle$$

2.2 Topologie des convexes

Définition 27. *Soit A une partie de E, le plus petit convexe contenant A est appelé enveloppe convexe de A et est noté* $\mathrm{Conv}(A)$*. Plus précisément, on a $x \in \mathrm{Conv}(A)$ si, et seulement si, $\exists p \in \mathbb{N}^*, \exists x_1,...,x_p \in A, \exists\lambda_1,...,\lambda_p \geqslant 0$ tels que*

$$x = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$$

Théorème 28 (Carathéodory)**.** *Soit A une partie de E, alors tout point de* $\mathrm{Conv}(A)$ *est combinaison convexe d'au plus $n+1$ points de A.*

Corollaire 29. *Si A est de plus compact, alors* $\mathrm{Conv}(A)$ *est compact.*

Définition 30. *Soit K un convexe compact non vide de E. On dit que $a \in K$ est extrémal lorsque $K \setminus \{a\}$ est convexe, autrement dit, si a n'est pas le milieu de deux points distincts de K.*

Théorème 31 (Krein-Milman)**.** *Soit K un convexe compact non vide de E, alors K est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.*

Application 32 : On munit $M_n(\mathbb{R})$ de la norme subordonnée à la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$ et on note B la boule unité fermée de $M_n(\mathbb{R})$ pour cette norme. Alors, l'ensemble des points extémaux de B est $O_n(\mathbb{R})$. En particulier,

$$\mathrm{Conv}\big(O_n(\mathbb{R})\big) = B$$

Définition 33 (Jauge de Minkowski)**.** *Soit C un convexe d'intérieur non vide, on pose pour $x \in C$,*

$$j(x) = \inf\left\{\lambda > 0, \frac{x}{\lambda} \in C\right\}$$

Proposition 34. *J est bien définie, on a*

1. $\forall\lambda > 0, j(\lambda x) = \lambda j(x)$.
2. $j(x+y) \leqslant j(x) + j(y)$.

3. *Si C est symétrique, alors $j(-x) = j(x)$.*
4. *Si C est bornée, alors $j(x) = 0 \iff 0$.*
5. *Si $B(0,r) \subset C$, alors j est $\frac{2}{r}$-lipschitzienne.*

Application 35 : Un convexe ouvert non vide est homéomorphe à E.

Corollaire 36. *Soit C une partie convexe, compacte, symétrique et d'intérieur non vide, alors j définit une norme sur E.*

Application 37 : Tout convexe compact d'intérieur non vide est homéomorphe à la boule unité fermée.

Définition 38. *Un ellipsoïde est un ensemble de la forme $\mathcal{E} = \left\{x \in \mathbb{R}^n, x^T Ax \leqslant 1\right\}$ où $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.*

Lemme 39. *Soit $A, B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et D diagonale à coefficients strictement positifs tels que*

$$A = P^T P \qquad \text{et} \qquad B = P^T DP$$

DEVELOPPEMENT 1

Lemme 40 (log-concavité du déterminant)**.** *Soit $A, B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha + \beta = 1$, alors*

$$\det(\alpha A + \beta B) \geqslant \det(A)^\alpha \det(B)^\beta$$

Théorème 41 (Ellipsoïde de John-Loewner)**.** *Soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$, alors il existe un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K.*

Application 41 : Les sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$ sont conjugués à $O_n(\mathbb{R})$.

2.3 Optimisation

Définition 42. *On dit que $J : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est coercive si $\displaystyle\lim_{\|u\| \to +\infty} |J(u)| = +\infty$.*

Proposition 43. *Soit $J : E \longrightarrow \mathbb{R}$ coercive continue, alors J admet un minimum.*

Application 44 : Soit $A \in M_{p,n}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^p$, alors le problème aux moindres carrés admet toujours une solution, ie $\displaystyle\inf_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|^2$ existe toujours.

Il suffit de considérer $J : x \in \mathbb{R}^n \longmapsto \frac{1}{2}\|Ax - b\|^2 - \frac{1}{2}\|b\|^2$ qui est convexe et l'ensemble des points minimisants est l'ensemble des x tels que

$$A^T Ax - A^T b = 0$$

Définition 45. *On dit que $J : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est α-elliptique si*

$$\forall x, y \in E, \langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y\rangle \geqslant \alpha\|x - y\|^2$$

Théorème 46 (Descente de gradient à pas constant)**.** *Soit J une fonction α-elliptique, différentiable et telle que ∇J est C-lipschitzienne, on définit la suite $u^{n+1} = u^n - \mu\nabla J(u^n)$ où $\mu \geqslant 0$ est fixé.*
Si $\mu \in \left]0, \frac{2\alpha}{C^2}\right[$, alors (u^n) converge vers l'unique minimum de J.

DEVELOPPEMENT 2

Lemme 47 (Kantorovitch)**.** *Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $x \neq 0$, alors*

$$\frac{\|x\|^4}{\|x\|_{A^{-1}}^2 \|x\|_A^2} \geqslant 4\frac{\lambda_{\max}\lambda_{\min}}{(\lambda_{\max} + \lambda_{\min})^2}$$

où $\|x\|_S = x^T Sx$ si $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Théorème 48. *Soit $\Phi(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - x^T b$ avec $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Alors,*

1. *Φ admet un unique minimium $\overline{x}$.*
2. *On définit $x_0 \neq \overline{x}$ et $x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla\Phi(x_k)$ avec $\alpha_k = \frac{\|\nabla\Phi(x_k)\|^2}{\|\nabla\Phi(x_k)\|_A^2}$, alors (x_k) converge vers $\overline{x}$.*
3. *De plus, on a l'estimation de la vitesse de convergence :*
$$\|x_{k+1} - \overline{x}\| \leqslant \sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}} \left(\frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}}\right)^{k+1} \|x_0 - \overline{x}\|$$
4. *Enfin, soit (x_k) est stationnaire à partir du rang 1, soit $x_k \neq x_{k+1}$ pour tout k.*

3 Espaces de Hilbert

On fixe H un espace de Hilbert.

3.1 Projection sur un convexe fermé et conséquences

Théorème 49. *Soit C un convexe fermé non vide de H, alors pour tout $x \in H$, il existe un unique $y \in C$ tel que $\|x - y\| = d(x, C)$. Ce point est appelé projection de x sur C, noté $p_C(x)$, caractérisé par*

$$y \in C \qquad \text{et} \qquad \forall z \in H, \operatorname{Re}\big(\langle x - y, z - y\rangle\big) \leqslant 0$$

Si F est un sous-espace fermé, alors p_F est la projection orthogonale sur F.

Exemple 50 : Un sous-espace de dimension finie de H est un convexe fermé non vide, on peut donc projeter sur les sous-espaces de dimension finie.

Corollaire 51. *Soit F un sous-espace fermé de H, alors*

$$H = F \oplus F^{\perp}$$

Application 52 : Soit F un sous-espace de H, alors F est dense dans H si, et seulement si, $F^{\perp} = 0$.

Théorème 53 (Représentation de Riesz)**.** *L'application $y \in H \longmapsto \langle \cdot, y \rangle \in H'$ est une isométrie surjective, ie pour toute forme linéaire continue $\phi \in H'$, il existe un unique $y \in H$ tel que*

$$\forall x \in H, \phi(x) = \langle x, y \rangle$$

avec $\|\phi\| = \|y\|$.

Application 54 : Soit T un opérateur de H, il existe un unique opérateur T^* de H tel que

$$\forall x, y \in H, \langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle$$

De plus, $\|T^*\| = \|T\|$. On appelle T^* l'opérateur adjoint de T.

3.2 Résolution d'EDP

Théorème 55 (Lax-Milgram)**.** *Soit L une forme linéaire continue sur H et a une forme biliénaire continue et coercive sur H. Alors, il existe un unique $u \in H$ tel que*

$$\forall v \in H, a(u, v) = L(v)$$

Si a est de plus symétrique, on note $J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v)$, alors u est l'unique minimum de l'énergie :

$$J(u) = \min_{v \in H} J(v)$$

Définition 56. *On définit $H^1(]0,1[) = \left\{u \in L^2(]0,1[), u' \in L^2(]0,1[)\right\}$ où la dérivée est prise au sens des distributions.*

Proposition 57. *On munit H^1 de la norme $\|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}}$, ce qui fait de H^1 un espace de Hilbert séparable.*

Théorème 58. *On a une injection continue $H^1(]0,1[) \hookrightarrow \mathcal{C}^0([0,1])$.*

Définition 59. *On définit $H_0^1(]0,1[)$ comme l'adhérence des fonctions $\mathcal{C}^{\infty}$ à support compact pour la norme H^1.*

Théorème 60.

$$H_0^1(]0,1[) = \left\{u \in H^1(]0,1[), u(0) = u(1) = 0\right\}$$

Proposition 61 (Inégalité de Poincaré)**.**

$$\forall u \in H_0^1(]0,1[), \|u\|_{L^2} \leqslant \frac{1}{\pi}\|u'\|_{L^2}$$

Application 62 : Soit $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ strictemnet convexe et $\mathcal{C}^1$ et $f \in L^2(]0,1[)$. L'équation $-u'' + \phi'(u) = f$ a une unique solution faible dans $H^2(]0,1[) \cap H_0^1(]0,1[)$.

Références :

- Allaire, Analyse numérique et optimisation.
- Brézis, Analyse fonctionnelle.
- Ciarlet, Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation.
- FGN, Analyse 3.
- Hirsch-Lacombe, Éléments d'analyse fonctionnelle.
- Pommellet, Cours d'analyse.
- Rouvière, Petit guide du calcul différentiel.
- Zuily, Quéffelec, Analyse pour l'agrégation.