246 : Séries de Fourier. Exemples et applications.

Pandou

3 mai 2022

1 Premières définitions

1.1 Polynômes trigonométriques

Définition 1. *On note $e_n : t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{int}$, $\mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ l'espace des fonctions continues 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$, sur lequel on définit le produit scalaire*

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t$$

Proposition 2. *La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormée dans $\mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.*

Corollaire 3. *La famille $\big(1,\cos(nt),\sin(nt)\big)_{n\geqslant 1}$ est orthogonale dans $\mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.*

Définition 4. *Un polynôme trigonométrique de degré N est un élément de* $\mathrm{Vect}(e_n)_{-N\leqslant n\leqslant N}$. *Les coefficients c_n de $\displaystyle\sum_{n=-N}^{N} c_n e_n$ sont alors appelés coefficients exponentiels de P.*

Remarque 5 : Tout polynôme trigonométrique peut s'écrire sous sa forme réelle : $\displaystyle\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}\big(a_n\cos(nt)+b_n\sin(nt)\big)$. Les coefficients (a_n) et (b_n) sont appelés coefficients trigonométriques de P.

Proposition 6. *En gardant les notations précédentes, on a*

$$\|P\|_2^2 = \sum_{n=-N}^{N}|c_n|^2 = \frac{a_0^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(|a_n|^2+|b_n|^2\right)$$

1.2 Séries trigonométriques

Définition 7. *Une série trigonométrique est une série de fonctions de la forme $\displaystyle c_0+\sum_{n\geqslant 1}\left(c_n e^{inx}+c_{-n}e^{-inx}\right)$ que l'on écrira plutôt $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$.*

Remarque 8 : En particulier, la convergence d'une série trigonométrique revient à la convergence de la suite $\displaystyle\left(\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}\right)_{N\in\mathbb{N}}$ et on notera alors

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$$

En particulier, on peut avoir convergence sans que la famille $(c_n e^{inx})_{n\in\mathbb{Z}}$ soit sommable.

Remarque 9 : On peut aussi définir une série trigonométrique de la forme $\displaystyle\frac{a_0}{2}+\sum_{n\geqslant 1}\big(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\big)$.

Proposition 10. *En gardant les notations précédentes, si $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}|c_n|$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}|c_{-n}|$ (resp. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}|a_n|$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}|b_n|$) convergent, alors les séries trigonométriques associées convergent normalement sur $\mathbb{R}$.*
En particulier, ces séries trigonométriques définissent des fonctions continues et 2π-périodiques.

Proposition 11. *Soit (a_n) et (b_n) deux suites décroissantes de réels positifs tendant* *vers 0, alors les séries trigonométriques* $\sum a_n \cos(nt)$ *et* $\sum b_n \sin(nt)$ *convergent uniformément sur tout segment de* $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

1.3 Séries de Fourier

Définition 12. *Soit f est continue par morceaux et 2π-périodique, on appelle coefficients de Fourier les complexes*

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\mathrm{d}t = \langle f, e_n \rangle$$

La série de Fourier de f est la série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int}$. *On note* $S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e_n$.

Remarque 13 : On définit de même des coefficients de Fourier "réels" via

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t$$

On a les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_n & = & c_n + c_{-n}(f) \\ b_n & = & i(c_n - c_{-n}) \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} c_n & = & \dfrac{a_n - ib_n}{2} \\ c_{-n} & = & \dfrac{a_n + ib_n}{2} \end{array} \right.$$

Remarque 14 : Le N-ième polynôme trigonométrique associé à la série de Fourier de f est la meilleure approximation de f dans $\mathrm{Vect}(e_n)_{-N\leqslant n\leqslant N}$.

Remarque 15 : Si f est T-périodique et continue en général, on a toujours des coefficients de Fourier définis par $c_n = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(x)e^{-\frac{2i\pi nx}{T}}\mathrm{d}x$.

Proposition 16. *Soit f continue par morceaux et 2π-périodique, alors :*

1. *Si* $\widehat{f}(x) = f(-x)$, *alors,* $c_n(\widehat{f}) = c_{-n}(f)$.
2. $c_n(\overline{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$.
3. *Si* $\tau_a f(x) = f(x-a)$, *alors* $c_n(\tau_a f) = e^{-ina}c_n(f)$.
4. $c_n(e_k f) = c_{n-k}(f)e_n$.
5. *Si f est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors* $c_n(f') = inc_n(f)$.

Théorème 17. *Si f est somme d'une série trigonométrique* $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e_n$ *qui converge uniformément, alors* $c_n(f) = c_n$.

Théorème 18 (Inégalité de Bessel)**.** *Soit f continue par morceaux et 2π-périodique, alors*

$$\sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2 \leqslant \|f\|_2^2$$

Théorème 19 (Lemme de Riemann-Lebesgue)**.** *Soit f continue par morceaux et 2π-périodique, alors*

$$c_n(f) \underset{|n|\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Corollaire 20. *Si f est $\mathcal{C}^{k-1}$ et $\mathcal{C}^k$ par morceaux, 2π-périodique, alors* $c_n(f) = o\left(\dfrac{1}{|n|^k}\right)$.

Définition 21. *Soit f une fonction continue par morceaux, on dit qu'elle vérifie la condition de Dirichlet si*

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$$

On notera $\mathcal{D}_{2\pi}$ l'espace des fonctions continues par morceaux, 2π-périodiques qui vérifient la condition de Dirichlet.

Remarque 22 : En munissant $\mathcal{D}_{2\pi}$ du même produit scalaire que celui sur $\mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on définit alors un espace préhilbertien.

Théorème 23. *Soit* $f \in \mathcal{D}_{2\pi}$, *alors si* $\forall n \in \mathbb{Z}, c_n = 0$, *alors* $f = 0$.

2 Modes de convergence

2.1 Produit de convolution et convergence en moyenne quadratique

Définition 24. *Soit f et g deux fonctions intégrables, alors on définit presque partout une fonction $f * g$ par*

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t$$

Proposition 25. *Le produit de convolution est commutatif et associatif. De plus, on a*

$$c_n(f * g) = c_n(f)c_n(g)$$

Théorème 26 (Formule de Parseval)**.** *Soit f continue par morceaux, 2π-périodique, alors*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \|f\|_2^2$$

Corollaire 27. *Soit $f \in \mathcal{D}_{2\pi}$, alors $S_N(f)$ converge vers f pour la norme L^2. En particulier, on en déduit que la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille totale de $\mathcal{D}_{2\pi}$.*

2.2 Noyau de Dirichlet et théorème de Dirichlet

Définition 28. *Soit $N \in \mathbb{N}$, on définit*

1. $D_N = \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} e_n$ *le noyau de Dirichlet.*
2. $K_N = \displaystyle\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} D_k$ *le noyau de Féjer.*

Proposition 29. *Le noyau de Dirichlet D_N vérifie :*

1. D_N *est paire et* $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\mathrm{d}t = 1$.
2. $D_N(x) = \dfrac{\sin\left(\frac{N+\frac{1}{2}}{x}\right)}{\sin\frac{x}{2}}$.
3. *Si f est continue par morceaux et 2π-périodique, alors $S_N(f) = f * D_N$.*

Théorème 30 (Dirichlet)**.** *Soit $f \in \mathcal{D}_{2\pi}$ qui est $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors $S_N(f)$ converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$.*

2.3 Noyau de Féjer et théorème de Féjer

Proposition 31. *Le noyau de Féjer K_N vérifie :*

1. $K_N = \displaystyle\sum_{n=-N}^{N}\left(1 - \frac{|n|}{N}\right) e_n$.
2. $K_N(x) = \dfrac{1}{N}\left[\dfrac{\sin\frac{Nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right]^2$.
3. $\|K_N\|_1 = 1$.
4. *Si* $\sigma_N(f) = \displaystyle\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} S_k(f)$, *alors* $\sigma_N(f) = f * K_N$.

Théorème 32 (Féjer)**.** *Si $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, alors $\sigma_N(f)$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.*

Corollaire 33 (Weierstrass trigonométrique)**.** *Toute fonction continue et périodique est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques.*

3 Applications

3.1 Calculs de sommes

Exemple 34 : Soit $f : x \in [-\pi,\pi] \longmapsto 1 - \dfrac{x^2}{\pi^2}$ prolongée par 2π-périodicité. Alors, on obtient

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(2n-1^2} = \frac{\pi^2}{8} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Définition 35. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit sa transformée de Fourier par*

$$\mathcal{F}(f) : \xi \longmapsto \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2i\pi\xi t}\mathrm{d}t$$

Théorème 36 (Formule de Poisson)**.** *Soit f continue et intégrable, on suppose qu'il existe $M > 0$, $\alpha > 1$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, \big|f(x)\big| \leqslant M\big(1+|x|\big)^{-\alpha}$ et tel que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mathcal{F}(f)(n)$ converge. Alors,*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\mathcal{F}(f)(n)$$

Application 37 : $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{a}\mathrm{cotanh}(a\pi)$.

Application 38 :

$$\forall s > 0, \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 s} = \frac{1}{\sqrt{s}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi n^2}{s}}$$

3.2 Reconstitution de signal

Théorème 39 (Échantillonnage de Shannon)**.** *Soit $f \in \mathcal{C}^\infty$ telle que sa transformée de Fourier est $\mathcal{C}^\infty$ à support compact, inclus dans $[-\omega, \omega]$. Alors pour $T > \frac{1}{2\omega}$, on a*

$$f(t) = 2\omega T \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2i\pi nT)\mathrm{sinc}\big(\omega(t - 2\pi nT)\big)$$

Remarque 40 : On peut reconstituer un signal physique en échantillonnant le signal “suffisamment” régulièrement.

DEVELOPPEMENT 1

Proposition 41 (Phénomène de Gibbs)**.** *On considère φ un signal carré : qui vaut 1 sur $]0, \pi[$ et 0 sur $]\pi, 2\pi[$ et $\frac{1}{2}$ en ses discontinuités et prolongée par 2π-périodicité. Alors,*

1. $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{\sin\big((2\nu-1)t\big)}{2\nu-1}$ *(convergence simple de la série de Fourier).*
2. *La série de Fourier ne converge pas uniformément vers f. En effet,*

$$\|S_{2n-1}(\varphi)\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin(s)}{s}\mathrm{d}s > 1$$

Remarque 42 : La série de Fourier d’un signal carré ne permet pas de reconstituer ses hautes fréquences.

3.3 Résolution de l’équation de la chaleur

DEVELOPPEMENT 2

Théorème 43. *Soit $f \in \mathcal{C}^1\big([0, \pi], \mathbb{R}\big)$ telle que $f(0) = f(\pi) = 0$. Alors, il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}^2\big([0, \pi]\times]0, +\infty[\big) \cap \mathcal{C}^0\big([0, \pi] \times [0, +\infty[\big)$ à l’équation de la chaleur :*

$$\begin{cases} \partial_t u & = & \partial^2_{xx} u & (x, t) \in [0, \pi]\times]0, +\infty[\\ u(x, 0) & = & f(x) & x \in [0, \pi] \\ u(0, t) = u(\pi, t) & = & 0 & t \in [0, +\infty[\end{cases}$$

Références :

- Amrani, Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions.
- Arnaudiès, Fraysse, Cours de mathématiques Tome 3.
- Beck, Malick, Peyré, Objectif agrégation.
- Chambert-Loir, Exercices de mathématiques pour l’agrégation.
- Gourdon, Analyse.
- Zuily, Quéffelec, Analyse pour l’agrégation.