245 : Fonctions d'une variable complexe. Exemples et applications.

Pandou

10 janvier 2022

1 Fonctions holomorphes

1.1 Holomorphie

Définition 1. *Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, on dit que f est dérivable en $z_0 \in \mathbb{C}$ si*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \in \mathbb{C}$$

Cette limite est alors notée $f'(z_0)$.
On dit que f est holomorphe sur U si elle est dérivable en tout point de U. On note $\mathcal{H}(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur U.

Proposition 2. *$\mathcal{H}(U)$ est une $\mathbb{C}$-algèbre. De plus, la composée de fonctions holomorphes est holomorphe. Enfin, l'inverse défini d'une fonction holomorphe est aussi holomorphe.*

Théorème 3 (Cauchy-Riemann)**.** *Soit $f : U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ et $z = x + iy \in U$. Alors, on a équivalence entre :*

1. *f est dérivable en z.*
2. *f est différentiable en (x, y) et*

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(x,y) := \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

3. *Si f s'écrit $u + iv$, alors u et v sont différentiables et*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} & = & \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} & = & -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Exemple 4 :

1. Si f est polynomiale, alors f est holomorphe sur $\mathbb{C}$.
2. Si f est la conjugaison complexe, alors f n'est pas holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Proposition 5. *Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(U)$, alors on équivalence entre :*

1. *f est constante sur U.*
2. *$\mathrm{Re}(f)$ est constante sur U.*
3. *$\mathrm{Im}(f)$ est constante sur U.*
4. *$|f|$ est constante sur U.*
5. *$\overline{f} \in \mathcal{H}(U)$.*

1.2 Analyticité

Définition 6. *Une série entière est une série de fonctions $\sum f_n$ où $f_n : z \in \mathbb{C} \longmapsto a_n z^n \in \mathbb{C}$ avec $a_n \in \mathbb{C}$. On dit que f est développable en série entière si f est somme d'une série entière au voisinage de 0.*
On dit que f est analytique sur $U \subset \mathbb{C}$ si pour tout $a \in U$, $z \mapsto f(z - a)$ est développable en série entière.

Exemple 7 : $z \longmapsto \dfrac{1}{z}$ est analytique sur $\mathbb{C}^*$.

Définition 8. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Alors, son rayon de convergence est la quantité $R = \sup \{|z|, (a_n z^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\} \in [0, +\infty]$.*

Lemme 9. *Si $\sum a_n z^n$ est de rayon de convergence R, alors $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $D(0, R)$.*

Théorème 10. *Si $\sum a_n z^n$ une série entière, on a*

$$R = \sup \left\{ |z|, \lim_{n \to +\infty} a_n z^n = 0 \right\} = \left\{ |z|, \sum_n a_n z^n \text{ converge absolument} \right\} = \left\{ |z|, \sum_n a_n z^n \text{ converge} \right\}$$

Théorème 11 (Formule de Hadamard)**.** *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon R, alors*

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Théorème 12 (Prolongement analytique)**.** *Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f analytique sur U. Alors, on a équivalence entre :*

1. *f est identiquement nulle sur U.*

2. *Il existe* $a \in U$ *tel que* $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(a) = 0$.

Théorème 13 (Principe des zéros isolés)**.** *Soit* U *un ouvert connexe de* $\mathbb{C}$ *et* f *analytique sur* U *non identiquement nulle. Alors, l'ensemble des zéros de* f *est une partie localement finie de* U.

Corollaire 14. *Si* U *est un ouvert connexe de* $\mathbb{C}$, *alors l'ensemble des fonctions analytiques sur* U *est un anneau intègre.*

Proposition 15. *Soit* U *un ouvert connexe de* $\mathbb{C}$ *et* f *analytique sur* U *non identiquement nulle et* $a \in U$ *un zéro de* f. *Alors, il existe un unique entier* p *tel que*

1. $\forall j \leqslant p-1, f^{(j)}(a) = 0$ *et* $f^{(p)}(a) \neq 0$.
2. *Il existe une fonction holomorphe* h *telle que* $h(a) \neq 0$ *et*

$$f(z) = (z-a)^k h(z)$$

au voisinage de a.

k *est alors appelé multiplicité du zéro de* f.

1.3 Formule de Cauchy

Définition 16. *Un chemin dans* $\mathbb{C}$ *est une application* $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *continue et* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux. On dit que* γ *est fermé si* $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Exemple 17 :

1. Si $z_0 \in \mathbb{C}$ et $R > 0$, alors, $t \in [0, 2\pi] \longmapsto z_0 + Re^{it} \in C(0,R)$ est une paramétrisation du cercle.
2. Si $u, v \in \mathbb{C}$, alors $t \in [0,1] \longmapsto (1-t)u + tv$ est une paramétrisation du segment $[u,v]$.

Définition 18. *Soit* $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *un chemin dans* $\mathbb{C}$ *et* f *une fonction continue sur* $\mathrm{Im}(\gamma)$, *alors on définit*

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\mathrm{d}t$$

Théorème 19. *Soit* U *un ouvert de* $\mathbb{C}$ *et* f *continue sur* U. *Alors, on a équivalence entre :*

1. f *admet une primitive sur* U.
2. *Pour tout chemin fermé* γ *dans* U, *on a* $\displaystyle\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$.

Théorème 20. *Soit* U *un ouvert convexe de* $\mathbb{C}$ *et* f *continue sur* U *telle que* $\displaystyle\int_{\partial\Delta} f(z)\mathrm{d}z = 0$ *pour tout triangle* Δ *de* U. *Alors,* f *admet une primitive sur* U.

Théorème 21 (de Goursat)**.** *Soit* U *un ouvert de* $\mathbb{C}$ *et* f *continue sur* U, *holomorphe sur* $U \setminus \{w\}$, *alors pour tout triangle* $\Delta \subset U$, *on a* $\displaystyle\int_{\partial\Delta} f(z)\mathrm{d}z = 0$.

Définition 22. *Soit* γ *un chemin fermé et* $U = \mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$. *Alors, on définit*

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}$$

Théorème 23 (Formule de Cauchy)**.** *Soit* γ *un chemin fermé dans un ouvert convexe* U *et* $z \in U \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$ *et* f *holomorphe sur* U, *alors*

$$f(z)\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w$$

Corollaire 24. *Si* γ *est un cercle de rayon* R *parcouru dans le sens direct, alors*

$$\forall z \in D(0,R), f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta$$

Théorème 25 (Morera)**.** *Soit* U *un ouvert de* $\mathbb{C}$ *et* f *continue sur* U. *Alors, on a équivalence entre :*

1. f *est holomorphe sur* U.
2. f *est analytique sur* U.
3. f *admet localement une primitive sur* U.
4. *Pour tout triangle* $\Delta \subset U$, *on a* $\displaystyle\int_{\partial\Delta} f(z)\mathrm{d}z = 0$.

2 Propriétés des fonctions holomorphes

2.1 Conséquences de la formule de Cauchy

Proposition 26. *Soit* f *une fonction holomorphe sur* $D(0,R)$, *on écrit* $f(z) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$, *alors*

$$\forall r < R, |a_n| \leqslant \frac{1}{r^n}\sup_{z\in C(0,R)} |f(z)|$$

Corollaire 27. *Toute focntion entière bornée est constante.*

Application 28 : Théorème de D'Alembert-Gauss.

Application 29 : Si f est holomorphe non constante sur $\mathbb{C}$, on a $f(\mathbb{C})$ dense dans $\mathbb{C}$.

Proposition 30 (Formule de la moyenne)**.** *Soit* U *un ouvert de* $\mathbb{C}$ *et* $f \in \mathcal{H}(U)$, *alors si* $D(a,r) \subset U$, *on a*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + re^{it})\mathrm{d}t$$

Théorème 31. *Soit* U *un ouvert de* $\mathbb{C}$ *et* f *holomorphe sur* U, *alors si* f *admet un maximum dans* U, *alors* f *est localement constante.*

2.2 Automorphismes du disque unité

DEVELOPPEMENT 1

Lemme 32. *Soit f une fonction holomorphe sur le disque ouvert $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ tel que $f(0) = 0$ et $\forall z \in \mathbb{D}, |f(z)| \leqslant 1$. Alors,*

1. $\forall z \in \mathbb{D}, \left|f(z)\right| \leqslant |z|$ *et* $\left|f'(0)\right| \leqslant 1$.
2. *Si on a égalité dans un des cas précédents, alors il existe $\lambda \in \mathbb{U}$ tel que $\forall z \in \mathbb{D}, f(z) = \lambda z$.*

Théorème 33. *Si $a \in \mathbb{D}$ et $\lambda \in \mathbb{U}$, on pose*

$$\varphi_{a,\lambda}(z) = \lambda \frac{a - z}{1 - \bar{a}z}$$

Alors,

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) = \{\varphi_{a,\lambda}, a \in \mathbb{D}, \lambda \in \mathbb{U}\}$$

Corollaire 34. *Si $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Im}(z) > 0\}$, alors $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) \simeq PGL_2^+(\mathbb{R})$.*

2.3 Suites dans $\mathcal{H}(U)$

Théorème 35. *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et (f_n) une suite d'éléments de $\mathcal{H}(U)$ qui converge uniformément sur tout compact vers f. Alors,*

1. $f \in \mathcal{H}(U)$.
2. *Pour tout $j \in \mathbb{N}$, la suite $\left(f_n^{(j)}\right)_n$ converge uniformément sur tout compact vers $f^{(j)}$.*

Théorème 36. *Soit X un espace mesuré et U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \times X \longrightarrow \mathbb{C}$. On suppose que*

1. *Pour tout $z \in U, x \longmapsto f(z,x)$ est intégrable sur X.*
2. *Pour tout $x \in X, z \longmapsto f(z,x)$ est holomorphe sur U.*
3. *Pour tout compact K de U, il existe une fonction g intégrable sur X telle que*

$$\forall (z,x) \in K \times X, \left|f(z,x)\right| \leqslant g(x)$$

Alors, $F : z \longmapsto \displaystyle\int_X f(z,x)\mathrm{d}\mu(x)$ est holomorphe sur U.

Proposition 37. *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Il existe une suite (K_n) de compacts de $\mathbb{C}$ tels que*

1. $U = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$.
2. $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$.
3. *Tout compact de U est contenu dans un des K_n.*

DEVELOPPEMENT 2

Théorème 38. *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{H}(U)$. Alors, on a équivalence entre :*

1. *$\mathcal{A}$ est bornée sur tout compact de U, ie pour tout compact K de U, il existe M telle que $\forall f \in \mathcal{A}, \|f\|_{\infty,K} \leqslant M$.*
2. *$\mathcal{A}$ est relativement compacte, ie pour toute suite (f_n) d'éléments de $\mathcal{A}$, il existe une sous-suite $(f_{\varphi(n)})$ qui converge uniformément sur tout compact.*

Application 39 : La convergence uniforme sur tout compact de $\mathcal{H}(U)$ n'est pas induite par une norme.

3 Méromorphie

Théorème 40. *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $a \in U$ et f holomorphe sur $U \setminus \{a\}$. Alors, seule une des trois possibilités suivantes apparait :*

1. *f se prolonge en a en une fonction holomorphe sur U.*
2. *Il existe une unique suite finie de complexes $(a_{-1}, ..., a_{-m})$ avec $m \geqslant 1$ et $a_{-m} \neq 0$ telle que*

$$z \longmapsto f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{a_{-k}}{(z-a)^k}$$

soit prolongeable en une fonction holomorphe sur U.
On dit que a est un pôle d'ordre m de f.

3. *Pour tout $r > 0$ tel que $D(a,r)$, l'ensemble $f\big(D(a,r) \setminus \{a\}\big)$ est dense dans $\mathbb{C}$. On dit que f admet une singularité essentielle en a.*

Exemple 41 :

1. Si f est holomorphe telle que $f(0) = 0$, alors $z \longmapsto \dfrac{f(z)}{z}$ est dans le cas 1..
2. $z \longmapsto \dfrac{1}{z}$ admet un pôle simple (d'ordre 1) en 0.
3. $z \longmapsto \exp\left(\dfrac{1}{z}\right)$ admet une singularité essentielle en 0.

Proposition 42. *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, A localement finie dans U et $f \in \mathcal{H}(U \setminus A)$ injective. Alors, les points de A sont soit effaçables, soit des pôles d'ordre 1.*
De plus, les prolongements holomorphes de f restent injectives.

Application 43 : Les automorphismes de $\mathbb{C}$ sont exactement les $z \longmapsto az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Application 44 : Les automorphismes de $\mathbb{C}^*$ sont de la forme $z \longmapsto az$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ ou $z \longmapsto \dfrac{a}{z}$ avec $a \in \mathbb{C}^*$.

Définition 45. *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. On dit que f est méromorphe sur U s'il existe une partie localement finie A de U telle que f est holomorphe sur $U \setminus A$ et telle que tout point de A soit un pôle de f.*
On note $\mathcal{M}(U)$ l'ensemble des fonctions méromorphes sur U.

Proposition 46. *Si U est connexe, $\mathcal{M}(U)$ est un corps.*

Définition 47. *Soit $f \in \mathcal{M}(U)$ et $a \in U$ un pôle d'ordre m. Alors, le coefficient a_{-1} défini dans le théorème 40 est appelé résidu de f en a, on le note $\mathrm{Res}_a(f)$.*

Proposition 48. *Soit $f \in \mathcal{M}(U)$ et $a \in U$ un pôle d'ordre m, alors,*
- *Si $m = 1$, alors*
$$\mathrm{Res}_a(f) = \lim_{z \to a} (z-a) f(z)$$
- *Si $m \geqslant 2$, alors*
$$\mathrm{Res}_a(f) = \lim_{z \to a} \left(\frac{1}{(m-1)!} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}} \big((z-a)^m f(z) \big) \right)$$

Théorème 49 (des résidus)**.** *Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{C}$ et $a_1, ..., a_n$ des points deux à deux distincts de U. On suppose que f est holomorphe sur $U \setminus \{a_1, ..., a_n\}$ et que chaque a_k est un pôle de f. Si γ est un chemin fermé dans U qui évite tous les a_i, alors*
$$\int_\gamma f(z) \mathrm{d}z = 2i\pi \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Ind}_\gamma(a_k) \mathrm{Res}_{a_k}(f)$$

Applications 50 :
1. On a, si $a > 1$,
$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{a + \cos(t)} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$$
En intégrant $\dfrac{2}{i} \dfrac{1}{z^2 + 2az + 1}$ sur le cercle unité.
2. En intégrant $\dfrac{e^{iz}}{z}$ sur un demi-cercle qui évite 0 (dessin en annexe), on trouve
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

Références :

- Amar, Matheron, Analyse complexe.
- Rudin, Analyse réelle et complexe.
- Tauvel, Analyse complexe.