243 : Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

Pandou

9 mai 2022

1 Séries entières et rayon de convergence

1.1 Définitions

Définition 1. *Soit (a_n) une suite de complexes. Une série entière est une série de fonctions de la forme $\sum a_n z^n$ pour $z \in \mathbb{C}$.*

Remarque 2 : Il est possible de considérer une série entière *réelle* avec $\sum a_n t^n$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Lemme 3 (Abel). *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, on suppose que $\left(a_n z_0^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Alors, pour tout $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.*

Définition 4. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On considère les ensembles suivants :*

1. *E_1 l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $\sum a_n z^n$ converge.*
2. *E_2 l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $\sum a_n z^n$ converge absolument.*
3. *E_3 l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $a_n z^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.*
4. *E_4 l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $(a_n z^n)_n$ est bornée.*

Théorème 5.

$$\sup E_1 = \sup E_2 = \sup E_3 = \sup E_4 \in [0, +\infty]$$

Cette quantité est appelée rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$, noté R_a.

Exemple 6 :

- Si π_n est la n-ième décimale de π, alors $\sum \pi_n z^n$ est de rayon 1.
- $\sum \frac{z^n}{n!}$ est de rayon $+\infty$.
- $\sum n z^n$ est de rayon nul.

Proposition 7. *Soit R_a le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$, alors*

1. *Si $|z| < R$, $\sum a_n z^n$ converge absolument.*
2. *Si $|z| > R$, $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.*

Remarque 8 : Si $|z| = R$, tout peut se produire.

- $\sum z^n$ ne converge pas si $|z| = 1$.
- $\sum \frac{z^n}{n^2}$ converge pour tout $|z| = 1$.
- $\sum \frac{z^n}{n}$ converge en tout point $|z| = 1$ sauf en $z = 1$.

1.2 Calcul du rayon de convergence

Théorème 9 (Formule de Hadamard). *Soit R le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$, alors*

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Proposition 10. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon R.*

1. *Si $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite $\ell \in [0, +\infty]$, alors $R = \frac{1}{\ell}$.*
2. *Si $a_n \neq 0$ pour n assez grand et si $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \longrightarrow \ell \in [0, +\infty]$, alors $R = \frac{1}{\ell}$.*

Exemple 11 :

- $\sum 2^n z^{2n}$ est de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
- $\sum \frac{n}{2^n} z^n$ est de rayon $\frac{1}{2}$.
- $\sum \binom{2n}{n} z^n$ est de rayon $\frac{1}{4}$.

Proposition 12. *Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières, alors*

1. *Si $|a_n| \leqslant |b_n|$ à partir d'un certain rang, alors $R_a \geqslant R_b$.*
2. *Si $a_n = O(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$.*
3. *Si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.*

1.3 Opérations sur les séries entières

Définition 13. *Soit* $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$ *deux séries entières. On définit alors*

1. *la série somme* $\sum (a_n + b_n) z^n$.
2. *la série produit* $\sum c_n z^n$ *avec* $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Théorème 14. *Soit* $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$ *deux séries entières et* $\lambda \in \mathbb{C}^*$, *alors*

1. *le rayon* R *de la série somme vérifie* $R \geqslant \min(R_a, R_b)$ *avec égalité si* $R_a \neq R_b$.
2. $R_{\lambda a} = R_a$.
3. *le rayon* R *de la série produit vérifie* $R \geqslant \min(R_a, R_b)$ *avec égalité si* $R_a \neq R_b$.

Remarque 15 :

- $\sum z^n$ et $\sum -z^n$ sont de rayon 1, mais leur série somme est de rayon infini.
- On note $a_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 0 \\ 2^n & \text{si } n \geqslant 1 \end{cases}$ et $b_n = \begin{cases} -1 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n \geqslant 1 \end{cases}$, alors $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont de rayons respectifs $\frac{1}{2}$ et 1, mais la série produit est la série nulle.

Définition 16. *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière, sa série dérivée est la série* $\sum (n+1) a_{n+1} z^n$.

Proposition 17. *La série dérivée a le même rayon de convergence que la série initiale.*

2 Propriétés de la somme

2.1 Régularité

Théorème 18. *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière de rayon* R, *alors elle converge normalement sur tout compact de* $D(0, R)$.

Corollaire 19. *En particulier, la somme est continue sur* $D(0, R)$ *et même holomorphe sur* $D(0, R)$ *et sa dérivée est la somme de la série dérivée.*

Remarque 20 : On peut dériver termes à termes sur l'intérieur du disque de convergence.

Exemple 21 : On a $\sum_{n \geqslant 1} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$.

Proposition 22. *Soit* $\sum a_n x^n$ *une série entière réelle de rayon* R, *alors pour tout segment* $[a, b] \subset]-R, R[$, *on a*

$$\int_a^b \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n \right) \mathrm{d}x = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \int_a^b x^n \mathrm{d}x$$

2.2 Développement en série entière

Définition 23. *Soit* f *une fonction définie dans un voisinage de* $z_0 \in \mathbb{C}$. *On dit que* f *est développable en série entière en* z_0 *s'il existe une série entière* $\sum a_n z^n$ *de rayon non nul et un voisinage* V *de* z_0 *tel que*

$$\forall z \in V, f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Proposition 24. *Toute fonction développable en série entière en* z_0 *est* $\mathcal{C}^\infty$ *et*

$$\forall p \in \mathbb{N}, a_p = \frac{f^{(p)}(z_0)}{p!}$$

Remarque 25 : $x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ est $\mathcal{C}^\infty$, mais n'est pas développable en série entière en 0.

Théorème 26 (Taylor avec reste intégral)**.** *Soit* f *une fonction* $\mathcal{C}^{n+1}$ *sur un segment* $[0, t]$, *alors on a*

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) t^k + \int_0^t \frac{(t-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(u) \mathrm{d}u$$

Proposition 27. *Soit* $r > 0$ *et* $f :]-r, r[\longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction* $\mathcal{C}^\infty$, *on suppose qu'il existe* $M > 0$ *tel que* $\forall t \in]-r, r[, \forall p \in \mathbb{N}, \left| f^{(p)}(t) \right| \leqslant M$, *alors* f *est développable en série entière en* 0.

2.3 Analyticité

Définition 28. *Une fonction* $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ *est analytique si elle est développable en série entière en tout point de* U.

Proposition 29. *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière de rayon* $R > 0$, *alors sa somme est analytique sur* $D(0, R)$.

Théorème 30 (Principe du prolongement analytique)**.** *Soit* U *un ouvert connexe et* $a \in U$. *Alors, on a équivalence entre :*

1. $f = 0$ *sur* U.
2. $f = 0$ *sur un voisinage de* a.
3. $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(a) = 0$.

Théorème 31 (Principe des zéros isolés)**.** *Soit* U *un ouvert connexe et* f *analytique sur* U *non identiquement nulle, alors* $f^{-1}(0)$ *est localement fini (ie discret et fermé).*

Corollaire 32. *Soit U un ouvert connexe, alors l'anneau des fonctions analytiques sur U est intègre.*

Théorème 33 (Formule de Cauchy (admis))**.** *Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{C}$, $z \in U$ et $r > 0$ tel que $\overline{B(z,r)} \subset U$, $\gamma : t \in [0,1] \longmapsto z + re^{2i\pi t}$ et f holomorphe sur U, alors*

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta$$

Corollaire 34. *Toute fonction holomorphe sur U est analytique sur U.*

Corollaire 35. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon $R > 0$ et f sa somme, alors*

$$\forall r \in]0, R[, a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} \mathrm{d}\theta$$

Application 36 : Toute fonction entière (ie somme d'une série entière de rayon $+\infty$) bornée sur $\mathbb{C}$ est constante.

Application 37 : (Théorème de D'Alembert) Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet une racine dans $\mathbb{C}$.

3 Applications

3.1 Étude au bord du domaine de convergence

DEVELOPPEMENT 1

Théorème 38 (Abel angulaire)**.** *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon 1 de somme f. Soit $\theta_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, on considère le domaine angulaire*

$$\mathcal{A}_{\theta_0} = \left\{1 - \rho e^{i\theta}, \theta \in [-\theta_0, \theta_0], \rho > 0\right\}$$

Si $\sum a_n$ converge, alors

$$\lim_{z \to 1, z \in \mathcal{A}_{\theta_0}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Application 39 : Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent et $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Si $\sum c_n$ converge, alors

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n\right) \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n\right)$$

Théorème 40 (Taubérien faible)**.** *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon 1 de somme f, on suppose que $\lim_{x \to 1^-} f(x) = S$ et que $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, alors $\sum a_n$ converge et $S = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$.*

Application 41 : (du théorème d'Abel)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2) \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

Remarque 42 : On a $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n z^n = \frac{1}{1+z}$ qui a une limite en 1^-, mais $\sum (-1)^n$ ne converge pas.
En fait, on peut assouplir les hypothèses du théorème taubérien en prenant $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, mais cela est beaucoup trop difficile pour cette leçon.

Proposition 43. *Soit (a_n) des réels strictement positifs tels que $\sum a_n z^n$ est de rayon 1 de somme f, alors $\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$.*

Théorème 44 (Comparaison de séries entières). *Soit $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de somme f et g avec $a_n > 0$ et $b_n = o(a_n)$. Alors, au voisinage de 1, on a $g(x) = o\big(f(x)\big)$.*

Corollaire 45. *Si $\sum a_n$ est une série à termes positifs divergente telle que $\sum a_n x^n$ est de rayon 1 et si $b_n \sim a_n$, alors*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x\to 1^-}{\sim} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

Application 46 : Si (a_n) est une suite à termes positifs telle que $a_0 + ... + a_n \sim n$, alors $f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{1}{1-x}$.

Remarque 47 : Les résultats se généralisent pour des séries de rayon $+\infty$.

3.2 Résolution d'équations différentielles

Méthode 48 : On peut chercher les solutions d'une équation différentielle linéaire en l'écrivant en série entière $h(x) = \sum_n a_n x^n$. On cherche alors une relation de récurrence vérifiée par la suite (a_n) par identification.
Réciproquement, il s'agit de vérifier que la série entière $\sum a_n x^n$ avec (a_n) vérifiant la relation de récurrence précédente a un rayon de convergence non nul.

DEVELOPPEMENT 2

Théorème 49. *L'ensemble des solutions développables en série entière sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) : $xy'' + y' + xy = 0$ est une droite vectorielle engendrée par la fonction $J : x \longmapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \frac{x^{2n}}{4^n (n!)^2}$.*

Proposition 50. *Il existe une solution de (E) sur $]0, +\infty[$ qui n'est pas bornée au voisinage de 0.*

Application 51 :

$$\forall x \in \mathbb{R}, J(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

Théorème 52 (Cas général). *Soit $a_0, ..., a_{p-1}, b$ $:]-R, R[\longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions développables en séries entière, on note $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_0(x) & a_1(x) & \dots & a_{p-2}(x) & a_{p-1}(x) \end{pmatrix}$, $B(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ b(x) \end{pmatrix}$ et $Y_0 \in \mathbb{R}^p$. Le problème de Cauchy $\begin{cases} Y' &= A(x)Y + B(x) \\ Y(0) &= Y_0 \end{cases}$ admet une unique solution développable en série entière sur $]-R, R[$.*

Application 53 : La fonction $f : x \in]-1, 1[\longmapsto \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ vérifie l'équation différentielle $y' - \frac{x}{1-x^2}y = 1$ et $y(0) = 1$. On en déduit que f est développable en série entière sur $]-1, 1[$ et

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Application 54 : Soit f une somme d'une série entière, alors e^f est aussi développable en série entière.

3.3 Application au dénombrement

Méthode 55 : Si (a_n) est une suite récurrente linéaire, on peut considérer des séries entières de la forme $\sum a_n x^n$ ou $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$ appelées série génératrice (exponentielle) de (a_n). La relation de récurrence sur (a_n) peut induire une équation différentielle sur la somme de la série génératrice et/ou un produit de Cauchy.
Ceci permet de calculer la somme de la série génératrice. Ceci peut donner des informations sur la suite (a_n).

Exemple 56 : Soit $\alpha_1, ..., \alpha_p$ des entiers premiers entre eux dans leur ensemble. Soit S_n le nombre de solutions $(n_1, ..., n_p) \in \mathbb{N}^p$ de

$$n_1\alpha_1 + ... + n_p\alpha_p = n$$

Alors, si $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} S_n z^n$, alors $f(z)$ est un produit de Cauchy et on en déduit par exemple

$$S_n \sim \frac{1}{\alpha_1 ... \alpha_p} \frac{n^{p-1}}{(p-1)!}$$

Exemple 57 : (Nombre de dérangement) Soit D_n le nombre de dérangements de $\mathfrak{S}_n$ (le nombre de permutations sans point fixe), on considère $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{D_k}{k!} z^k$. Grâce à la relation $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D_k = n!$, on en déduit que

$$D_k = k!\sum_{p=0}^{k}\frac{(-1)^p}{p!}$$

Exemple 58 : (Nombres de Catalan) Soit (c_n) une suite qui vérifie la relation de récurrence $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k}$, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n$, alors $f(x)^2 = f(x) - x$ et on en déduit que

$$c_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$

Exemple 59 : (Nombres de Bell) Soit (B_n) le nombre de partitions de $[\![1,n]\!]$. On pose $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{B_n}{n!}z^n$, grâce à la relation $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k$, on en déduit que $f' = e^z f'$ et

$$B_n = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^n}{k!}$$

Exemple 60 : (Partition d'un entier) Pour $|t| < 1$, on note $f(t) = \prod_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{1-t^k}$. On note p_n le nombre de partitions de l'entier n, ie le nombre de suites (y_k) telles que $\sum_{k\geqslant 1} k y_k = n$, alors on a

$$f(t) = 1 + \sum_{n\geqslant 1} p_n t^n$$

Une étude difficile de cette série donne le résultat difficile (et admis) suivant $p_n \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}}e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}$.

Références :

- Amrani, Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions.
- Arnaudiès, Fraysse, Cours de mathématiques Tome 3 - Compléments d'analyse.
- FGN, Algèbre 1, Analyse 2.
- Gourdon, Analyse.
- Pommellet, Cours d'analyse.
- Rombaldi, Éléments d'analyse réelle.
- Tauvel, Analyse complexe pour la L3.
- Zuily, Quéffelec, Analyse pour l'agrégation.