241 : Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

Pandou

29 janvier 2022

X est un espace métrique, E est un espace normé, (f_n) est une suite de fonctions $X \longrightarrow E$ et $f : X \longrightarrow E$.

1 Modes de convergence

1.1 Convergence simple

Définition 1. *La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers f lorsque pour tout $x \in X$, la suite numérique $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.*
On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement si la suite des sommes partielles converge simplement.

Exemple 2 : Soit $f_n : x \in [0,1] \longmapsto x^n \in [0,1]$. (f_n) converge simplement vers $f : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ qui n'est pas continue.

Exemple 3 : Soit $g_n : x \in \mathbb{R} \longmapsto \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x}{n}\right)$, alors

$$0 = \lim_{x\to+\infty} \lim_{n\to+\infty} g_n(x) \neq \lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to+\infty} g_n(x) = \frac{\pi}{2}$$

1.2 Convergence uniforme

Définition 4. *On dit que (f_n) converge uniformément vers f si $(f_n - f)$ est bornée à partir d'un certain rang et $\|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0$.*
La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément si la suite de fonctions $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k\right)_k$ converge uniformément.

Exemple 5 : (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur $[0,1[$, par contre converge uniformément vers 0 sur tout $[0,a]$, pour $a < 1$.

Remarque 6 : La convergence uniforme implique la convergence simple.

Exemple 7 : Une limite simple de fonctions K-lipschitziennes est uniforme.

Exercice 8 : Soit V un sous-espace de dimension finie de $\mathcal{C}^0\big([0,1]\big)$ et (f_n) une suite de V qui converge simplement sur $[0,1]$, alors la convergence est uniforme.

Théorème 9 (Approximation de Weierstrass)**.** *Toute fonction continue sur un segment est limite uniforme de polynômes.*

Théorème 10. *On suppose que E est un espace de Banach, alors (f_n) converge uniformément si, et seulement si,*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geqslant N, \|f_p - f_q\|_\infty \leqslant \varepsilon$$

Remarque 11 : Cela signifie que l'espace des applications bornées de X dans E muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in X} |f(x)|$ est un espace de Banach.

Exemple 12 : Une limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de polynômes est un polynôme.

Théorème 13. *Si X est compact et $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite de fonctions continues. On suppose que*

1. *Pour tout $x \in X$, $\big\{\big|f_n(x)\big|, n \in \mathbb{N}\big\}$ est borné.*
2. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x, y \in \mathbb{R}, |x - y| \leqslant \eta \Longrightarrow \big|f_n(x) - f_n(y)\big| \leqslant \varepsilon$$

Alors, il existe une sous-suite de (f_n) qui converge uniformément.

1.3 Convergence normale

Définition 14. *On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement si la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.*

Proposition 15. *La convergence normale implique la convergence uniforme.*

Remarque 16 : Il s'agit d'un critère souvent pratique pour montrer la convergence uniforme. Mais, on peut avoir convergence uniforme sans avoir convergence normale : $\sum \frac{(-1)^n}{n^x}$ converge uniformément sur $[0,1]$, mais pas normalement.

2 Propagation de régularité

2.1 Continuité

Théorème 17. *Soit (f_n) une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers f. Alors, f est continue.*

Remarque 18 : La contraposée permet parfois de voir rapidement que la convergence n'est pas uniforme. Par contre, la réciproque est fausse : $f_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$ converge simplement vers 0 sur $\mathbb{R}_+$, mais la convergence n'est pas uniforme.

Théorème 19. *Si E est un Banach et que (f_n) converge uniformément, alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$$

Remarque 20 : Les résultats tiennent pour des séries de fonctions.

Théorème 21 (Dini)**.** *Soit $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite de fonctions qui converge simplement vers $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Si l'une des conditions est vérifiée :*

1. *(f_n) est une suite croissante : $\forall x \in [a,b], f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$.*
2. *Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, f_n est une fonction croissante.*

Alors, la convergence est uniforme.

Application 22 : $x \longmapsto \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ converge uniformément vers exp sur tout segment.

Exemple 23 : Soit Δ la fonction 1-périodique telle que $\forall |x| \leqslant \dfrac{1}{2}, \Delta(x) = |x|$, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{2^n}\Delta(2^n x)$ est continue et nulle part dérivable.
En conséquence, l'ensemble des fonctions continues nulle part dérivables est dense dans $\mathcal{C}^0([a,b])$.

2.2 Dérivation

Théorème 25. *Soit (f_n) une suite de fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ qui converge simplement vers f. On suppose que (f_n') converge uniformément vers g, alors f est $\mathcal{C}^1$ et*

$$\forall x \in [a,b], f'(x) = g(x)$$

Remarque 26 : La convergence uniforme de (f_n') est primordiale et la convergence uniforme de (f_n) ne suffit pas : par exemple $x \longmapsto \sqrt{x^2+\dfrac{1}{n}}$ converge uniformément vers $x \longmapsto |x|$.

Théorème 27. *Soit E, F deux espaces normés de dimension finie et $f_n : U \subset E \longrightarrow F$ une suite d'applications différentiables qui converge simplement vers f sur U. On suppose que $(\mathrm{d}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une application $U \longrightarrow \mathcal{L}(E,F)$.*
Alors, f est différentiable sur U et

$$\mathrm{d}f = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{d}f_n$$

Application 28 : $\exp : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est $\mathcal{C}^1$ et si $M, H \in M_n(\mathbb{C})$, on a

$$\mathrm{d}\exp(M)\cdot H = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p!} \sum_{k=0}^{p-1} M^k H M^{p-1-k}$$

2.3 Holomorphie

Théorème 29. *Soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ qui converge uniformément sur tout compact vers une fonction f. Alors,*

1. *f est holomorphe sur U.*
2. *Pour tout entier p, $f_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout compact vers $f^{(p)}$.*

Application 30 : La fonction $s \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^s}$ est holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(z) > 1\}$.

2.4 Intégration

Dans cette partie, X est un espace mesuré.

Théorème 31 (Convergence monotone)**.** *Soit (f_n) une suite croissante de fonctions positives mesurables qui converge simplement, alors la limite simple est mesurable et*

$$\int_X \lim_{n\to+\infty} f_n \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu$$

Corollaire 32 (Lemme de Fatou)**.** *Soit (f_n) une suite de fonctions positives et mesurables, alors*

$$\int_X \liminf_{n\to+\infty} f_n \mathrm{d}\mu \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu$$

Théorème 33 (Convergence dominée). *Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables qui converge simplement vers f presque partout. On suppose qu'il existe $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrable telle que pour presque tout x,*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|f_n(x)\right| \leqslant g(x)$$

Alors, $\|f_n - f\|_{L^1} \longrightarrow 0$. En particulier, on a

$$\int_X f \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu$$

Théorème 34. *Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables telle que la série de terme général $\int |f_n|\mathrm{d}\mu$ converge, alors*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\int_X f_n \mathrm{d}\mu\right) = \int_X \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n\right) \mathrm{d}\mu$$

Application 35 : $\displaystyle\int_0^1 x^x \mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}$.

3 Séries entières

Définition 36. *Une série entière est une série de fonctions de la forme $\displaystyle\sum_n a_n z^n$.*

Proposition 37. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et $R > 0$ tel que $\left(a_n R^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Alors,*

1. *$\sum a_n z^n$ est absolument convergente sur $D(0, R)$.*
2. *Pour tout $r < R$, $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{D(0, r)}$.*

Définition 38. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Son rayon de convergence est le réel*

$$R = \sup\left\{r \geqslant 0, \left(a_n r^n\right) \text{ est bornée}\right\} \in [0, +\infty]$$

Théorème 39. *Avec les notations précédentes, on a*

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Proposition 40. *Soit $R > 0$ le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$, alors*

1. *Pour tout $0 < r < R$, $f : z \longmapsto \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ converge normalement sur $D(0, r)$ et ses séries dérivées ont même rayon de convergence.*
2. *Si $|z| > R$, $\displaystyle\sum_n a_n z^n$ diverge grossièrement.*
3. *Sur $C(0, R)$, tout peut se produire.*

DEVELOPPEMENT 1

Théorème 41 (Abel angulaire). *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon 1 de somme f. Soit $\theta_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, on considère le domaine angulaire*

$$\mathcal{A}_{\theta_0} = \left\{1 - \rho e^{i\theta}, \theta \in [-\theta_0, \theta_0], \rho > 0\right\}$$

Si $\displaystyle\sum_n a_n$ converge, alors

$$\lim_{z\to 1, z\in\mathcal{A}_{\theta_0}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Application 42 : Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont deux séries convergentes, on note $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Si $\sum c_n$ converge, alors

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n\right)$$

Théorème 43 (Taubérien faible). *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon 1 de somme f telle que $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x)$ existe, notée S. On suppose que $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, alors $\sum a_n$ converge et $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.*

4 Séries de Fourier

On notera $e_n : t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{int}$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

Définition 44. *Soit $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'espace des fonctions continues par morceaux et 2π-périodique. Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on note*

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} \mathrm{d}t$$

La série de Fourier de f est la série $\sum c_n(f) e_n$, on note $S_N = \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e_n$ la N-ième *somme partielle.*

Proposition 45 (Riemann-Lebesgue). *Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, alors*

$$c_n(f) \underset{|n|\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Proposition 46. *Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n|$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} |c_{-n}|$ convergent, alors $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.*

Proposition 47. *Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, alors*

1. *$f * g \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.*
2. *$c_n(f*g) = c_n(f)c_n(g)$.*
3. *$f * g = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)c_n(g)e_n$.*

Théorème 48 (Parseval). *Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, alors*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(t)\right|^2 \mathrm{d}t$$

Application 49 : En regardant $f : x \in [0,\pi] \longmapsto x(\pi - x)$, soit f_p (resp. f_i) le prolongement pair (resp. impair) et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, alors on a

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

Théorème 50. *Soit f une fonction 2π-périodique, continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors la série de Fourier de f converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$.*

Application 51 : Soit f une fonction $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\mathcal{F}(f)$ est $\mathcal{C}^\infty$ à support dans $[-\omega,\omega]$. Si $T < \frac{1}{2\omega}$, alors, f est somme d'une série uniformément convergente

$$f(t) = 2T\omega \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2\pi nT)\mathrm{sinc}\big((t - 2n\pi T)\omega\big)$$

DEVELOPPEMENT 2

Théorème 52 (Équation de la chaleur). *Soit $f \in \mathcal{C}^1\big([0,\pi],\mathbb{R}\big)$ telle que $f(0) = f(\pi) = 0$. Alors, il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}^2\big([0,\pi]\times]0,+\infty[\big) \cap \mathcal{C}^0\big([0,\pi]\times[0,+\infty[\big)$ à l'équation aux dérivées partielles*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) & = & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) & & (x,t) \in [0,\pi]\times]0,+\infty[\\ u(x,0) & = & f(x) & & x \in [0,\pi] \\ u(0,t) & = & u(\pi,t) & = 0 & \end{cases}$$

Références :

- Hauchecorne, Les contre-exemples en Mathématiques.
- El Amrani, Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions.
- Beck, Malick, Peyré, Objectif agrégation.
- Francinou, Gianella, Nicolas, Oraux X-ENS - Analyse 2.
- Gourdon, Analyse.
- Chambert-Loir, Fermigier, Maillot. Exercices de mathématiques pour l'Agrégation - Analyse 1.
- Tauvel, Analyse complexe.
- Bernis, Analyse pour l'agrégation de mathématiques.
- Zuily, Quéffelec. Analyse pour l'agrégation.