239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

Pandou

10 janvier 2022

1 Régularité

On fixe $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et E un espace métrique.

Théorème 1. *Soit $f : E \times X \longrightarrow \mathbb{C}$. On suppose que*

1. *$\forall t \in E, x \longmapsto f(t,x)$ est mesurable.*
2. *Pour presque tout $x \in X$, $t \longmapsto f(t,x)$ est continue sur E.*
3. *Il existe $g \in L^1(X)$ tel que pour presque tout $x \in X$ et tout $t \in E$, on a*

$$\left|f(t,x)\right| \leqslant g(x)$$

Alors, $t \longmapsto \int_X f(t,x)\mathrm{d}\mu(x)$ est définie et continue sur E.

Application 2 : La fonction $\Gamma : t \longmapsto \int_0^{+\infty} x^{t-1}e^{-x}\mathrm{d}x$ est continue sur $]0,+\infty[$.

Application 3 : Si f est intégrable et φ continue bornée, alors leur convolution $f * \varphi$ est continue et bornée.

Théorème 4. *On suppose que E est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On suppose que*

1. *Pour tout $t \in E, x \longmapsto f(t,x)$ est intégrable.*
2. *Il existe une partie N de X négligeable telle que $\forall x \notin N, t \longmapsto f(t,x)$ est dérivable sur E.*
3. *Pour tout compact K de E, il existe une fonction g intégrable telle que*

$$\forall x \notin N, \forall t \in K, \left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leqslant g(x)$$

Alors, pour tout $t \in E, x \longmapsto \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ est intégrable et $F : t \longmapsto \int_X f(t,x)\mathrm{d}\mu(x)$ est dérivable sur E et

$$F'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\mathrm{d}\mu(x)$$

Corollaire 5. *On suppose que E est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On suppose que*

1. *Pour tout $t \in E, x \longmapsto f(t,x)$ est intégrable.*
2. *Il existe une partie N de X négligeable telle que $\forall x \notin N, t \longmapsto f(t,x)$ est $\mathcal{C}^k$ sur E.*
3. *Pour tout compact K de E et pour tout $j \leqslant k$, il existe une fonction g_j intégrable telle que*

$$\forall x \notin N, \forall t \in K, \left|\frac{\partial^j f}{\partial t^j}(t,x)\right| \leqslant g_j(x)$$

Alors, pour tout $j \leqslant k$ et pour tout $t \in E, x \longmapsto \frac{\partial^j f}{\partial t^j}(t,x)$ est intégrable et $F : t \longmapsto \int_X f(t,x)\mathrm{d}\mu(x)$ est $\mathcal{C}^k$ sur E et

$$F^{(j)}(t) = \int_X \frac{\partial^j f}{\partial t^j}(t,x)\mathrm{d}\mu(x)$$

Application 5 : La fonction Γ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.

Application 6 : Si f est intégrable et φ est $\mathcal{C}^1$, bornée et à dérivée bornée, alors $(f * \varphi)$ est $\mathcal{C}^1$ et

$$(f * \varphi)' = f * \varphi'$$

Application 7 : Soit φ une fonction intégrable sur $[0,1]$, on définit $F(t) = \int_0^1 \sqrt{\varphi(x)^2+t}\mathrm{d}t$, alors F est dérivable à droite en 0 si, et seulement si, $\frac{1}{\varphi}$ est intégrable sur $[0,1]$.

Théorème 8. *On suppose que $E = \Omega$ est un ouvert de $\mathbb{C}$. On suppose que*

1. *Pour tout $z \in \Omega$, $x \longmapsto f(z,x)$ est intégrable.*
2. *Il existe N une partie de X négligeable telle que pour tout $x \notin N$, $z \longmapsto f(z,x)$ est holomorphe.*
3. *Pour tout compact K de Ω, il existe g intégrable telle que*

$$\forall z \in K, \forall x \notin N, \left|f(z,x)\right| \leqslant g(x)$$

Alors, $z \longmapsto \int_X f(z,x)\mathrm{d}\mu(x)$ est holomorphe sur Ω.

Remarque 8 : Le théorème d'holomorphie demande seulement la domination de f ! ! C'est dramatiquement faible comparé aux théorèmes de dérivation.

Application 9 : La fonction Γ est holomorphe sur $\{\mathrm{Re}(z) > 0\}$ (et c'est immédiat ! !).

Remarque 10 : Dans le cas d'intégrales semi-convergentes, on peut souvent se ramener (dans la pratique) à des intégrales convergentes par intégrations par parties.

2 Étude asymptotique

2.1 Convergences

Théorème 11. *Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge presque partout vers une fonction f. On suppose qu'il existe g intégrable telle que pour presque tout $x \in X$, on a $\left|f_n(x)\right| \leqslant g(x)$. Alors,*

$$\int_X f_n(x)\mathrm{d}x \longrightarrow \int_X f(x)\mathrm{d}x$$

Exemple 12 : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^n \mathrm{d}t \longrightarrow 0.$

Théorème 13. *Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables. On suppose que $\sum \left(\int |f_n|\right)$ converge, alors $\sum f_n$ converge presque partout vers une fonction intégrable et*

$$\int_X \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)\right)\mathrm{d}x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\int_X f_n(x)\mathrm{d}x\right)$$

Remarque 14 : Ce théorème est en fait profondément différent du théorème 11. En effet, comparons les deux hypothèses demandée :

1. Pour le théorème 10, on demande $\left|\sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right| \leqslant g(x)$ qui est intégrable.
2. Pour le théorème 11, on demande $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\int_X f_n(x)\mathrm{d}x\right)$ converge.

Dans le cas d'une série alternée, le théorème 11 aura plus de chance d'échouer que le théorème 10.

2.2 Méthode de Laplace et de la phase stationnaire

Théorème 15. *Soit $g, h :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle ouvert $]a,b[$. On suppose que*

1. *$x \longmapsto g(x)e^{h(x)}$ est intégrable sur $]a,b[$.*
2. *h' change de signe en un unique point $c \in]a,b[$ et h est maximal en c avec $h''(c) < 0$ et où $g(c) \neq 0$.*

Alors, on a

$$\int_a^b g(x)e^{th(x)}\mathrm{d}x \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{\pi}\sqrt{\frac{2}{-h''(c)}}g(c)\frac{e^{th(c)}}{\sqrt{t}}$$

Application 16 : On a l'estimation suivante pour la fonction Γ :

$$\Gamma(t+1) \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x$$

Théorème 17. *Soit $g, h :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle ouvert $]a,b[$. On suppose que*

1. *$x \longmapsto g(x)e^{ih(x)}$ est intégrable sur $]a,b[$.*
2. *h' ne change de signe qu'en un point $c \in]a,b[$, h est maximale en c avec $h''(c) < 0$ et $g(c) \neq 0$.*

Alors, on a l'estimation

$$\int_a^b g(x)e^{i\lambda h(x)}\mathrm{d}x \underset{\lambda\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda h''(c)}}g(c)e^{i\lambda h(c)}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Application 18 : On considère la fonction d'Airy $\mathrm{Ai}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx+i\frac{x^3}{3}}\mathrm{d}x$. Alors,

1. Ai a une décroissance rapide en $+\infty$.
2. Quand $t \longrightarrow -\infty$, on a

$$\mathrm{Ai}(t) \sim 2\sqrt{\pi}|t|^{-\frac{1}{4}}\cos\left(2|t|^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4}\right)$$

Remarque 19 : En fait ces deux méthodes découlent toutes deux d'une méthode "complexe" : la méthode du col.

3 Convolution

3.1 Définitions

Définition 20. *Si $a \in \mathbb{R}^d$ et $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow X$, on note*

$$\tau_a f : x \longmapsto f(x-a)$$

Théorème 21. *Soit $a \in \mathbb{R}^d$ et $f \in L^1$, alors*

$$\lim_{a\to 0} \left\|\tau_a f - f\right\|_{L^1} = 0$$

En particulier, τ_a est uniformément continue sur $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Définition 22. *Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors on définit presque partout :*

$$f * g : x \longmapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y$$

Proposition 23. *Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $f * g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f * g(x)\mathrm{d}x = \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbb{R}^d} g(x)\mathrm{d}x\right)$$

De plus, on a

$$\|f * g\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}$$

Proposition 24. *Si f est $\mathcal{C}^k$ et que $g \in L^1$ à support compact, alors*

$$(f * g)^{(d)} = (f^{(d)} * g)$$

3.2 Applications

Théorème 25. *Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$ et Ω un voisinage ouvert de K, alors il existe une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact qui vaut 1 sur K, 0 sur Ω^c et à valeurs dans $[0, 1]$.*

Proposition 26. *1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}_c^k(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d)$ pour la convergence uniforme sur tout compact.*

2. Si $p < +\infty$, $L_c^p(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Théorème 27. *1. Pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d)$.*

2. Si $p < +\infty$, $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Définition 28. *Une approximation de l'unité est une famille de fonctions positives (ρ_ε) telles que*

1. $\rho_\varepsilon \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.
2. $\mathrm{Supp}(\rho_\varepsilon) \subset B(0, \varepsilon)$.
3. $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon = 1$.

Proposition 29. *Soit (ρ_ε) une approximation de l'unité.*

1. *Si $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$, alors $\rho_\varepsilon * f$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}^d$.*
2. *Si $p < +\infty$ et $f \in L_c^p(\mathbb{R}^d)$, alors $\rho_\varepsilon * f$ converge vers f dans L^p.*

4 Transformée de Fourier

4.1 Formule d'inversion L^1 et Fourier-Plancherel

Définition 30. *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on définit la transformée de Fourier de f par*

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x,\xi\rangle}f(x)\mathrm{d}x$$

Proposition 31. *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $\mathcal{F}(f)$ est continue et $\lim_{\|\xi\|\to+\infty} \mathcal{F}(f)(\xi) = 0$.*

DEVELOPPEMENT 1

Lemme 32. *Soit $a > 0$ et $f_a : x \longmapsto e^{-a\|x\|^2}$. Alors,*

$$\mathcal{F}(f_a) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{n}{2}} f_{\frac{1}{4a}}$$

Théorème 33. *Si $f \in L^1$ et $\mathcal{F}(f) \in L^1$, alors*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}(f)(\xi) e^{i\langle x, \xi\rangle} \mathrm{d}\xi$$

Théorème 34 (Plancherel)**.** *Si $f \in L^1 \cap L^2$, alors $\mathcal{F}(f) \in L^2$ et $\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\mathcal{F}$ est une isométrie.*

Corollaire 35. *$\mathcal{F}$ se prolonge en un automorphisme $L^2 \longrightarrow L^2$. De plus, $\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\mathcal{F}$ est une isométrie.*

4.2 Espace de Schwartz

Définition 36. *Soit $\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty, \forall p, q \in \mathbb{N}, \exists C > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \left| x^p f^{(q)}(x) \right| \leqslant C \right\}$.*

Théorème 37. *Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

Corollaire 38. *Comme $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$, la formule d'inversion de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est toujours valable.*

Proposition 39. *Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors,*

$$\mathcal{F}(f)' = -i\mathcal{F}(xf) \qquad \textit{et} \qquad \mathcal{F}(f') = -i\xi\mathcal{F}(f)$$

Théorème 40. *$\mathcal{F}$ est un opérateur autoadjoint sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t)\mathrm{d}t$.*

5 Vers le calcul des variations

DEVELOPPEMENT 2

Théorème 41. *Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on note $E_{a,b} = \left\{ x \in \mathcal{C}^1\big([0,1], \mathbb{R}\big), x(0) = a, x(1) = b \right\}$. Soit $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et*

$$J : x \in E_{a,b} \longmapsto \int_0^1 L\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big)\mathrm{d}t$$

Si J admet un minimum local en $x \in E_{a,b}$, alors

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big) = \frac{\partial L}{\partial x}\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big)$$

Remarque 42 : L'équation d'Euler-Lagrange est une équation d'ordre 2 en γ. Si L est régulier, ie si L est $\mathcal{C}^2$ avec $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, q, v)$ est un isomorphisme, alors le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique : pour tout (t_0, q_0, v_0), il existe une unique courbe extrémale x telle que $x(t_0) = q_0$ et $\dot{x}(t_0) = v_0$.

Références :

- Amrani, Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions.
- Briane, Pagès, Gilles, Théorie de l'intégration.
- Gourdon, Analyse.
- Zuily, Quéffelec, Analyse pour l'agrégation.