236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

Pandou

3 juin 2021

1 Calculs de primitives

1.1 Généralités

Théorème 1. *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, alors f admet au moins une primitive F et on a $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.*

Corollaire 2. *En particulier, si f est $\mathcal{C}^1$, alors $\displaystyle\int_a^b f'(t)\mathrm{d}t = f(b) - f(a)$.*

Théorème 3 (Intégration par parties)**.** *Soit $u, v : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions $\mathcal{C}^1$, alors*

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

Théorème 4 (Changement de variables)**.** *Soit $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux telle que $\varphi\big([a,b]\big) \subset I$. Alors,*

$$\int_a^b f \circ \varphi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\mathrm{d}u$$

Remarque 5 : En général, on essaie de calculer $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ et on fait un changement de variables en posant $u = \psi(x)$ et c'est dans ce cas là qu'on suppose que φ doit être bijective pour appliquer le résultat précédent avec $\varphi = \psi^{-1}$.

Théorème 6 (Changement de variables)**.** *Soit φ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre deux ouverts U et V et $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrable, alors*

$$\int_V f(v)\mathrm{d}v = \int_U f \circ \varphi(u)\big|\det \mathrm{d}\varphi(u)\big|\mathrm{d}u$$

Exemple 7 : On se place dans $\mathbb{R}^2$ et on veut faire le changement de variables polaires $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ avec $r \geqslant 0$ et $\theta \in [0, 2\pi]$. On trouve alors

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{[0,+\infty[\times[0,2\pi]} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

1.2 Fractions rationnelles

Exemple 8 : (Primitives élémentaires)

$f(x)$	$F(x)$
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
e^x	e^x
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\tan(x)$	$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$
$\mathrm{cotan}(x)$	$\ln\lvert\sin(x)\rvert$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$
$\frac{1}{\sin^2(x)}$	$-\mathrm{cotan}(x)$
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathrm{ch}(x)$
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathrm{sh}(x)$
$\mathrm{th}(x)$	$\ln\mathrm{ch}(x)$

$f(x)$	$F(x)$
$\coth(x)$	$\ln\mathrm{sh}(x)$
$\frac{1}{\mathrm{ch}(x)^2}$	$\mathrm{th}(x)$
$\frac{1}{\mathrm{sh}(x)^2}$	$-\coth(x)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\ln(x+\sqrt{1+x^2})$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\ln\lvert x+\sqrt{x^2-1}\rvert$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan(x)$

Méthode 9 : (Intégration des fractions rationnelles) Soit $F \in \mathbb{R}(X)$. Pour calculer $\displaystyle\int F$, on décompose F en éléments simples. On ramenés à intégrer des termes de la forme $\dfrac{1}{(x-a)^n}$ et $\dfrac{ax+b}{(x^2+cx+d)^n}$ qu'on écrit sous la forme $\dfrac{2\alpha(x-p)}{\big[(x-p)^2+q^2\big]^n} + \dfrac{\beta}{\big[(x-p)^2+q^2\big]^n}$.

- Termes de la forme $\dfrac{1}{(x-a)^n}$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^n} = \begin{cases} \frac{1}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C & \text{si } n \neq 1 \\ \ln\lvert x-a\rvert + C & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

- Termes de la forme $\dfrac{2\alpha(x-p)}{\big[(x-p)^2+q^2\big]^n}$.

$$\int \frac{2\alpha(x-p)}{\big[(x-p)^2+q^2\big]^n} = \begin{cases} \frac{\alpha}{(1-n)\big[(x-p)^2+q^2\big]^{n-1}} + C & \text{si } n \geqslant 2 \\ \alpha\ln\big[(x-p)^2+q^2\big] + C & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

- Termes de la forme $\dfrac{\beta}{\left[(x-p)^2+q^2\right]^n}$. On fait le changement $t=x-p$ et on intègre par parties, en notant $I_n=\displaystyle\int\frac{1}{(t^2+q^2)^n}\mathrm{d}t$, on a :

$$2nq^2 I_{n+1}=(2n-1)I_n+\frac{t}{(t^2+q^2)^n}$$

et $I_1=\dfrac{1}{q}\mathrm{Arctan}\dfrac{x}{q}$.

Exemple 10 : $\dfrac{1-x}{(x^2+x+1)^2}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}+\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^2}$ et on trouve :

$$\int\frac{1-x}{(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x=\frac{x+1}{x^2+x+1}+\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

1.3 Fractions rationnelles en cos et sin

Méthode 11 : (Polynômes en sin et cos) On veut intégrer $\sin^m(x)\cos^n(x)$.

- Si m ou n est impair, disons $n=2p+1$, on fait le changement de variables $u=\sin(x)$:

$$\int\sin^m(x)\cos^n(x)=\int\sin^m(x)(1-\sin^2x)^p\cos(x)\mathrm{d}x=\int u^m(1-u^2)^p\mathrm{d}u$$

- Sinon, en général, on linéarise $\sin^m$ et $\cos^n$ grâce à l'exponentielle complexe.

Exemple 12 :

$$\int\cos^4(x)=\int\left(\frac{\cos(4x)}{8}+\frac{\cos(2x)}{2}+\frac{3}{8}\right)=\frac{\sin(4x)}{32}+\frac{\sin(2x)}{4}+\frac{3}{8}x$$

Méthode 13 : (Fractions rationnelles en sin et cos) On veut intégrer $R(\sin x,\cos x)$ où $R\in\mathbb{R}(X,Y)$. Le changement de variables $t=\tan\dfrac{x}{2}$ nous ramène à $\displaystyle\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

Méthode 14 : (Règle de Bioche)

- Si $R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$ est invariant par $x\leftrightarrow\pi-x$, on fait $t=\sin(x)$.
- Si $R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$ est invariant par $x\leftrightarrow -x$, on fait $t=\cos(x)$.
- Si $R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$ est invariant par $x\leftrightarrow\pi+x$, on fait $t=\tan(x)$.

Exemple 15 :

$$\int\frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}\mathrm{d}x\underset{t=\cos x}{=}-\int\frac{1-t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t=\cos(x)-2\mathrm{Arctan}(\cos x)+C$$

1.4 Fractions rationnelles et exp

Méthode 16 : (Fractions rationnelles en exp) On veut intégrer $R(e^x)$ avec $R\in\mathbb{R}(X)$. On fait $t=e^x$ et on a

$$\int R(e^x)\mathrm{d}x=\int\frac{R(t)}{t}\mathrm{d}t$$

Méthode 17 : (Fractions rationnelles en trigonométrique hyperbolique) On raisonne par analogie avec la méthode 10 et la règle de Bioche.

Exemple 18 :

$$\int\frac{e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x\underset{t=e^x}{=}\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t}=\ln(1+e^x)$$

Méthode 19 : (Polynôme et exponentielle) On cherche à intégrer $P(x)e^{rx}$. On cherche alors une primitive sous la forme Qe^{rx} et on identifie les coefficients dans l'expression $rQ+Q'=P$.
Si on veut intégrer $P(x)e^{rx}\cos(mx)$, on passe par l'exponentielle complexe.

1.5 Intégrales abéliennes

Méthode 20 : (Expressions radicales-homographiques) On veut intégrer $R\left(x,\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)$ où $R\in\mathbb{R}(X,Y)$. On fait $t=\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$. On est ramenés à

$$\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}t=\int R\big(g(t),t\big)g'(t)\mathrm{d}t\qquad\text{avec}\qquad g(t)=\frac{dt^n-c}{a-t^nc}$$

Exemple 21 :

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}\underset{t=\sqrt[6]{1+x}}{=}\int\frac{6t^5}{t^3-t^2}\mathrm{d}t=2\sqrt{1+x}+3\sqrt[3]{1+x}+6\sqrt[6]{1+x}+6\log\left|\sqrt[6]{1+x}-1\right|$$

Méthode 22 : (Expressions radicales-second degré) On veut intégrer $R\big(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\big)$, soit $\Delta=b^2-4ac$.

- Si $\Delta>0$, on écrit $\sqrt{ax^2+bx+c}=|x-\alpha|\sqrt{a\dfrac{x-\beta}{x-\alpha}}$ et on applique la méthode 16.
- Si $\Delta<0$, on écrit $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}\sqrt{q^2+(x-p)^2}$ et on fait le changement de variables $x-p=q\mathrm{sh}(t)$.

Exemple 23 : $\displaystyle\int\sqrt{1-x^2}=\frac{1}{2}\big(x\sqrt{1-x^2}-\mathrm{Arccos}(x)\big)$.

2 Utilisation de techniques d'analyse

2.1 Méthodes d'interversion

Théorème 24 (Convergence dominée)**.** *Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables qui converge simplement presque partout vers f. On suppose qu'il existe g intégrable telle que $\forall n \geqslant 1, |f_n| \leqslant g$ presque partout. Alors,*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X |f_n - f| \mathrm{d}\mu = 0 \qquad \text{en particulier,} \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu = \int_X f \mathrm{d}\mu$$

Application 25 : $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t.$

Théorème 26 (Fubini)**.** *On suppose que μ et ν sont σ-finies et $f : X \times Y \longrightarrow K$ intégrable. Alors,*

1. *Pour presque tout x, $y \longmapsto f(x,y)$ est intégrable et pour presque tout y, $x \longmapsto f(x,y)$ est intégrable.*
2. *$x \longmapsto \int_Y f(x,y)\mathrm{d}\nu(y)$ et $y \longmapsto \int_X f(x,y)\mathrm{d}\mu(x)$ sont intégrables.*
3. $$\int_{X\times Y} f \mathrm{d}\mu \otimes \nu = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\nu(y)$$

Application 27 : (Intégrale de Gauss) Si $I = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\mathrm{d}x$, le calcul de I^2 en coordonnées polaires donne $I = \sqrt{\pi}$.

Application 28 : (Volume de la boule unité) On note v_d le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^d$. Deux changements de variables et le théorème de Fubini donnent $v_d = \frac{2\pi}{d} v_{d-2}$. D'où

$$v_{2k} = \frac{\pi^k}{k!} \qquad \text{et} \qquad v_{2k+1} = 2^{2k+1} \frac{\pi^k k!}{(2k+1)!}$$

2.2 Intégrales à paramètres

Théorème 29 (Continuité sous l'intégrale)**.** *Soit E un espace métrique et X mesurable et $f : E \times X \longrightarrow \mathbb{C}$. On suppose que*

1. *Pour tout $u \in E, f(u,\cdot)$ est mesurable.*
2. *$u \longmapsto f(u,x)$ est continue en $u_0 \in E$ pour presque tout x.*
3. *Il existe g intégrable telle que $\forall u \in E, \left|f(u,\cdot)\right| \leqslant g$ pour presque tout x.*

Alors, $u \longmapsto \int_X f(u,x)\mathrm{d}\mu(x)$ est continue en u_0.

DEVELOPPEMENT 1

Application 30 : Si $f \in \mathcal{C}^0\left([0,1]\right)$, on définit

$$I(f) : x \in [0,1] \longmapsto \sqrt{\frac{x}{\pi}} \int_0^1 \frac{f(ux)}{\sqrt{1-u}} \mathrm{d}u$$

Alors, I est un opérateur continu de $\mathcal{C}^0\left([0,1]\right)$ tel que

$$\forall f \in \mathcal{C}^0\left([0,1]\right), \forall x \in [0,1], I \circ I(f)(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

Application 31 : En admettant que pour $n < m$, $\int_{\mathbb{R}} \frac{x^{2n}}{1+x^{2m}}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{m \sin\left(\frac{2n+1}{2m}\pi\right)}$, on trouve que

$$\forall \alpha > 1, \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha} = \frac{\pi}{\alpha \sin(\pi/\alpha)}$$

Théorème 32 (Dérivation sous l'intégrale)**.** *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, X mesurable et $f : I \times X \longrightarrow \mathbb{C}$. On suppose que*

1. *Pour tout $u \in I, f(u,\cdot)$ est intégrable.*
2. *Pour presque tout x, $u \longmapsto f(u,x)$ est dérivable sur I.*
3. *Il existe g intégrable telle que pour presque tout x, pour tout $u \in I$, on a $\left|\frac{\partial f}{\partial u}(u,x)\right| \leqslant g(x)$.*

Alors, $F : u \longmapsto \int_X f(u,x)\mathrm{d}\mu(x)$ est dérivable sur I et

$$\forall u \in I, F'(u) = \int_X \frac{\partial f}{\partial u}(u,x)\mathrm{d}\mu(x)$$

Application 33 : (Intégrale de Gauss) En considérant $g : x \in [0,+\infty[\longmapsto \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t$, on en déduit que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Application 34 : (Intégrale de Dirichlet) En considérant $h : x \in\in \mathbb{R}_+ \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}\mathrm{d}t$, on en déduit que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

Application 35 : (Transformée de Fourier) Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit sa transformée de Fourier par

$$\mathcal{F}(f) : \xi \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi}\mathrm{d}x$$

Si f est intégrable, alors $\mathcal{F}(f)$ est continue. Si de plus, $x \longmapsto xf(x)$ est intégrable, $\mathcal{F}(f)$ est $\mathcal{C}^1$.

DEVELOPPEMENT 2

Lemme 36. *Soit $f(x) = e^{-ax^2}$ avec $a > 0$, alors*

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$$

Théorème 37. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R})$, alors*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(\xi)e^{i\xi x}\mathrm{d}\xi$$

2.3 Théorème des résidus

Théorème-Définition 38. *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, $a \in U$ et $f \in \mathcal{H}(U \setminus \{a\})$. Alors, f vérifie une seule des trois propriétés suivantes :*

1. *f se prolonge en a en une fonction holomorphe sur U. On dit que a est une singularité effaçable.*
2. *Il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et des complexes $a_{-1}, ..., a_{-m}$ avec $a_{-m} \neq 0$ tels que*

$$z \longmapsto f(z) - \sum_{k=0}^{m} \frac{a_{-k}}{(z-a)^k}$$

a une singularité effaçable en a.
On dit que a est un pôle d'ordre m.

3. *Pour tout $r > 0$ tel que $D(a,r) \subset U$, l'ensemble $f\big(D(a,r) \setminus \{a\}\big)$ est dense dans $\mathbb{C}$. On dit que a est une singularité essentielle de f.*

Proposition 39. *Soit $f \in \mathcal{H}(U \setminus \{a\})$. On a équivalence entre :*

1. *a est un pôle d'ordre m.*
2. *Il existe $r > 0$ tel que $D(a,r) \subset U$ et g holomorphe sur $D(a,r)$ telle que $g(a) \neq 0$ et*

$$\forall z \in D(a,r) \setminus \{a\}, f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}$$

Exemple 40 : Les singularités des fractions rationnelles non polynomiales sont soit effaçables, soit des pôles.

Exemple 41 : Pour $z \longmapsto e^{\frac{1}{z}}$, 0 est une singularité essentielle.

Définition 42. *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. On dit que $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ est méromorphe sur U s'il existe une partie localement finie A de U telle que f est holomorphe sur $U \setminus A$ et telle que tout point de A est un pôle de A. On note $\mathcal{M}(U)$ l'ensemble des fonctions méromorphes sur U.*

Définition 43. *Soit $f \in \mathcal{M}(U)$ et $a \in U$ un pôle de f. Si $\sum_{k=1}^{m} a_{-k}(z-a)^k$ est la partie principale de f, le résidu de f en a est le coefficient a_{-1}. On le note $\mathrm{Res}_f(a)$.*

Proposition 44. *Soit $f \in \mathcal{M}(U)$ et a un pôle d'ordre m de f.*

- *Si $m = 1$, $\mathrm{Res}_f(a) = \lim_{z \to a}(z-a)f(z)$.*
- *Si $m \geqslant 2$, $\mathrm{Res}_f(a) = \dfrac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\dfrac{\mathrm{d}^{m-1}(z-a)^m f(z)}{\mathrm{d}z^{m-1}}$.*

Théorème 45 (Résidus)**.** *Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{C}$ $a_1, ..., a_n \in U$ et $f \in \mathcal{M}(U)$ dont les pôles sont les a_i. Soit γ un chemin fermé dans U qui ne rencontre aucun a_i, alors*

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 2i\pi \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Ind}_\gamma(a_k)\mathrm{Res}_f(a_k)$$

Exemple 46 : $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{a+\cos(t)} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$.

Application 47 : (Intégrale de Dirichlet) En considérant le contour dans l'annexe, on calcule $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.

Application 48 : On complète l'application 31 en montrant que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{x^{2n}}{1+x^{2m}}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{m\sin\left(\frac{2n+1}{2m}\pi\right)}$.

3 Calcul approché d'intégrales

3.1 Méthodes de quadrature

Principe 49 : Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. On subdivise $a = \alpha_0 < ... < \alpha_n = b$ et on est ramenés à l'étude de $\displaystyle\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x$ sur des petits intervalles.
Une méthode de quadrature élémentaire consiste à approcher les intégrales précédentes : si $\xi_{i,j} \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ pour $0 \leqslant j \leqslant \ell_i$ et $\omega_{i,j}$ tels que $\displaystyle\sum_{j=0}^{\ell_i}\omega_{i,j} = 1$ et on veut faire l'approximation

$$\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x \approx (\alpha_{i+1} - \alpha_i)\sum_{j=0}^{\ell_i}\omega_{i,j}f(\xi_{i,j})$$

où les points $\xi_{i,j}$ et les coefficients $\omega_{i,j}$ sont bien choisis pour minimiser l'erreur.

Définition 50. *On dit qu'une méthode de quadrature est d'ordre N si*

- *On a égalité* $\displaystyle\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x \approx (\alpha_{i+1}-\alpha_i)\sum_{j=0}^{\ell_i}\omega_{i,j}f(\xi_{i,j})$ *pour tout* $f \in \mathbb{R}_N[X]$
- *L'égalité précédente n'est plus une égalité pour au moins un* $f \in \mathbb{R}_{N+1}[X]$.

Remarque 51 : Toute méthode de quadrature est d'ordre au moins 0.

Exemples 52 :

1. Si $\ell_i = 0$, on définit la méthode des rectangles (à gauche, à droite, centrés) qui correspond à l'approximation
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{k-1}(\alpha_{i+1}-\alpha_i)f(\xi_i) \qquad \text{où} \qquad \xi_i \in \left\{\alpha_i, \alpha_{i+1}, \frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}}{2}\right\}$$
2. Si $\ell_i = 1$, on interpole f entre $f(\alpha_i)$ et $f(\alpha_{i+1})$. On obtient la méthode des trapèzes qui correspond à l'approximation
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{k-1}(\alpha_{i+1}-\alpha_i)\frac{f(\alpha_i)+f(\alpha_{i+1})}{2}$$

- Si $\ell_i = \ell$, on prend $\xi_{i,j} = \alpha_i + j\dfrac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{\ell}$ (équirépartis). La méthode de Newton-Cotes de rang ℓ correspond à l'approximation
$$\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x \approx (\alpha_{i+1}-\alpha_i)\sum_{j=0}^{\ell}\omega_j f(\xi_{i,j})$$
où $\omega_j = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1}\prod_{k\neq j}\frac{x-\tau_k}{\tau_k-\tau_j}$ où les τ_k sont les ℓ points équirépartis sur $[-1,1]$.

Proposition 53 (Admis).
- *Si ℓ est pair, l'ordre de Newton-Cotes de rang ℓ est $\ell+1$.*
- *Si ℓ est impair, l'ordre de Newton-Cotes de rang ℓ est ℓ.*

Remarque 54 : Les méthodes de Newton-Cotes ne sont utilisés que pour ℓ pair (sauf $\ell = 1$).
- **Méthode des trapèzes :** $\ell = 1$, $\omega_0 = \omega_1 = \dfrac{1}{2}$.
- **Méthode de Simpson :** $\ell = 2$ et $\omega_0 = \omega_2 = \dfrac{1}{6}$ et $\omega_1 = \dfrac{2}{3}$.

Théorème 55. *On suppose que les méthodes de quadrature élémentaire font intervenir un nombre de points ℓ fixe et que les coefficients $\omega_{i,j}$ ne dépendent pas de i.*
$$E(f) := \left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{k-1}(\alpha_{i+1}-\alpha_i)\sum_{j=0}^{\ell}\omega_j f(\xi_{i,j})\right| \underset{h_{\max}\to 0}{\longrightarrow} 0$$
où $h_{\max} = \displaystyle\max_{0\leqslant i\leqslant k-1}(\alpha_{i+1}-\alpha_i)$.

Remarque 56 : On suppose que nos méthodes précédentes sont faites pour des points équirépartis, distants de h.
- **Point milieu :** Il existe $\xi \in]a,b[$ tel que $E(f) = \dfrac{h^2}{24}f''(\xi)(b-a)$.
- **Trapèzes :** Il existe $\xi \in]a,b[$ tel que $E(f) = \dfrac{h^2}{12}f''(\xi)(b-a)$.
- **Simpson :** Il existe $\xi \in]a,b[$ tel que $E(f) = \dfrac{h^4}{2880}f^{(4)}(\xi)(b-a)$.

3.2 Méthode de Gauss

Définition 57. *On dit qu'une fonction $w :]a,b[\longrightarrow]0,+\infty[$ est un poids si w est continue et si $\displaystyle\int_a^b w(t)\mathrm{d}t$ converge.*

Proposition 58. *On définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0(]a,b[)$ via $\langle f,g\rangle_w = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)w(t)\mathrm{d}t$.*

Théorème 59. *Soit w un poids. Il existe une unique suite de polynômes unitaires (P_n) tel que $\deg(P_n) = n$ deux à deux orthogonaux pour le produit scalaire de w. On dit que P_n est le n-ième polynôme orthogonal pour le poids w.*

Théorème 60. *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et w un poids sur $]a,b[$ et $\ell \in \mathbb{N}^*$. Il existe un unique choix de points x_i et de coefficients λ_j de sorte que la méthode de quadrature $\displaystyle\int_a^b f(x)w(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{j=0}^{\ell}\lambda_j f(x_j)$ est d'ordre exactement $2\ell+1$.*
Les points (x_i) sont les racines du $(\ell+1)$-ième polynôme orthogonal pour le poids w.

Exemple 61 : (Méthode de Gauss-Legendre) Si $w(x) = 1$ sur $[a,b] = [-1,1]$. Alors, on a les points et les coefficients suivants :

ℓ	$P_{\ell+1}$	(x_i)	(λ_j)
0	x	0	2
1	$x^2 - \frac{1}{3}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$	$1, 1$
2	$x^3 - \frac{3}{5}x$	$\pm sqrt\frac{3}{5}, 0$	$\frac{5}{9}, \frac{8}{9}, \frac{5}{9}$
3	$x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}$	$\pm\sqrt{\frac{3}{7} \pm \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\frac{1}{2} \pm \frac{1}{6}\sqrt{\frac{5}{6}}$

Références :

- Briane, Pagès, Théorie de l'intégration.
- Demailly, Analyse numérique et équations différentielles.
- Gourdon, Analyse.
- Rudin, Analyse réelle et analyse complexe.
- Tauvel, Analyse complexe.