235 : Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.

Pandou

3 juin 2022

1 Convergence uniforme

Soit $(E, |\cdot|)$ un espace de Banach.

1.1 Rappels et convergence normale

Définition 1. *Soit $f_n : X \longrightarrow E$ et $f : X \longrightarrow E$. On dit que (f_n) converge uniformément vers f si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \forall x \in X, \left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant \varepsilon$$

Remarque 2 : Si g est bornée, on note $\|g\|_\infty = \sup_{x \in X} \left|g(x)\right|$. Alors, (f_n) converge uniformément vers f si, et seulement si, $(f_n - f)$ est bornée à partir d'un certain rang et $\|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0$.

Exemple 3 : Soit $f_n : x \longmapsto x^n$, alors (f_n) converge uniformément vers 0 sur tout compact de $[0, 1[$, mais pas sur $[0, 1[$.

Théorème 4 (Critère de Cauchy)**.** *(f_n) converge uniformément vers f si, et seulement si,*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geqslant N, \forall x \in X, \left|f_p(x) - f_q(x)\right| \leqslant \varepsilon$$

Définition 5. *On dit que $\sum f_n$ converge uniformément si la suite des sommes partielles $S_n := \sum_{k=0}^{n} f_k$ est une suite qui converge uniformément. On dit que $\sum f_n$ converge normalement si $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.*

Proposition 6. *$\sum f_n$ converge uniformément si, et seulement si, $R_n := \sum_{k \geqslant n+1} f_k$ converge uniformément vers 0.*

Proposition 7. *Si $\sum f_n$ converge normalement, alors $\sum f_n$ converge uniformément.*

Remarque 8 : La réciproque est fausse : $\sum (-1)^n \frac{x}{n^2 + x^2}$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$, mais pas normalement.

1.2 Convergence uniforme et intégrale de Riemann

Théorème 9. *Soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux sur un segment $[a, b]$ qui converge uniformément vers une fonction continue par morceaux f. Alors,*

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x) \mathrm{d}x = \int_a^b f(x) \mathrm{d}x$$

Remarque 10 : Si la suite (f_n) est continue, alors sa limite uniforme est automatiquement continue.

Corollaire 11. *Si $\sum f_n$ est une série de fonctions continues sur $[a, b]$ qui converge normalement sur $[a, b]$, alors*

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(x) \mathrm{d}x \right)$$

Théorème 12. *Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a, b]$ qui converge simplement vers f. On suppose que la suite (f_n) est uniformément bornée et si (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment de $]a, b[$. Alors, f est continue et*

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x) \mathrm{d}x = \int_a^b f(x) \mathrm{d}x$$

Exemple 13 : Si $[a, b] = [0, 1]$ et $f_n(x) = x^n$, alors on trouve bien $\int_a^b f_n(x) \mathrm{d}x \longrightarrow 0$, car (f_n) est uniformément bornée par 1.

Remarque 14 : L'hypothèse de borne uniforme est importante. Par exemple $f_n(x) = (n + 1) \cos^n(x) \sin(x)$ converge uniformément vers 0 sur tout segment de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, mais pourtant, on a $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x) \mathrm{d}x = 1$ qui ne tend pas vers 0.

1.3 Convergence uniforme et intégrales impropres

Théorème 15. *Soit $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ et (f_n) une suite de fonctions continues et intégrables sur $]a,b[$ dans E et $f :]a,b[\longrightarrow E$. On suppose que*

1. *(f_n) converge uniformément vers f sur tout segment de $]a,b[$.*
2. *Il existe $\varphi :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ intégrable telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]a,b[, \left|f_n(x)\right| \leqslant \varphi(x)$$

Alors, f est intégrable et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Remarque 16 : En pratique, la convergence uniforme est une contrainte forte sur la suite (f_n). On préfère l'utilisation du théorème de convergence dominée.

Remarque 17 : L'hypothèse de domination par φ est primordiale comme le montre la remarque 14.

2 Intégrale de Lebesgue

2.1 Théorèmes de convergence

Théorème 18 (Convergence monotone)**.** *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et (f_n) une suite croissante de fonctions mesurables positives. Alors,*

$$\int_X \lim_{n\to+\infty} f_n \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu$$

Corollaire 19 (Lemme de Fatou)**.** *Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables positives, alors*

$$\int_X \liminf_{n\to+\infty} f_n \mathrm{d}\mu \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu$$

Exemple 20 : Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables qui converge simplement vers f telle que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X |f_n|\mathrm{d}\mu < +\infty$, alors f est intégrable et

$$\int_X |f|\mathrm{d}\mu \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \int_X |f_n|\mathrm{d}\mu \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X |f_n|\mathrm{d}\mu$$

Application 21 : Soit f croissante et continue en 0 et en 1, alors $\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x \leqslant f(1) - f(0)$.

Théorème 22 (Convergence dominée)**.** *Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables qui converge simplement presque partout vers une fonction f. On suppose qu'il existe une fonction g intégrable telle que $\forall n \geqslant 1, |f_n| \leqslant g$ presque partout.*
Alors, f est intégrable et on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X |f_n - f|\mathrm{d}\mu = 0, \qquad \textit{en particulier,} \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu = \int_X f\mathrm{d}\mu$$

Remarque 23 : L'hypothèse de domination est primordiale comme le montre la remarque 14.

Application 24 : Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ strictement croissante telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Alors, $\int_0^1 f(t)^n \mathrm{d}t \longrightarrow 0$.

Théorème 25. *Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables.*

1. *Si les (f_n) sont positives, alors*

$$\int_X \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n\right) \mathrm{d}\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n \mathrm{d}\mu$$

2. *Si $\sum_n \int_X |f_n|\mathrm{d}\mu$ converge, alors $\sum f_n$ est intégrable et*

$$\int_X \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n\right) \mathrm{d}\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n \mathrm{d}\mu$$

Application 26 (Borel-Cantelli) : Soit (A_n) une famille de parties mesurables telle que $\sum \mu(A_n) < +\infty$, alors $\mu\big(\limsup_{n\to+\infty} A_n\big) = 0$.

Exemple 27 : $\displaystyle\int_0^1 x^x \mathrm{d}x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.

Application 28 : (Riesz-Fischer) L^p est complet.

2.2 Intégrales dépendant d'un paramètre

Théorème 29 (Continuité sous l'intégrale). *Soit E un espace métrique et X un espace mesuré et $f : E \times X \longrightarrow K$. On suppose que*

1. *$\forall u \in E, f(u, \cdot)$ est mesurable.*
2. *Pour presque tout x, $u \longmapsto f(u,x)$ est continue en $u_0 \in E$.*
3. *Il existe une fonction intégrable g telle que $\forall u \in E, \left|f(u,\cdot)\right| \leqslant g$ pour presque tout x.*

Alors, $F : u \in E \longmapsto \int_X f(u,x)\mathrm{d}\mu(x)$ est définie et continue en u_0.

Application 30 : Soit f intégrable et φ continue et bornée, alors $f * \varphi$ est une fonction continue et bornée.

Théorème 31 (Dérivation sous l'intégrale). *Soit I un intervalle ouvert et X un espace mesuré et $f : I \times X \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que*

1. *Pour tout $u \in I, f(u,\cdot)$ est intégrable.*
2. *Pour presque tout x, $u \longmapsto f(u,x)$ est dérivable sur I*
3. *Il existe une fonction intégrable g telle que pour tout $u \in I, \left|\partial_u f(u,\cdot)\right| \leqslant g$ pour presque tout x.*

Alors, $F : u \in I \longmapsto \int_X f(u,x)\mathrm{d}\mu(x)$ est dérivable et on a

$$F'(u) = \int_X \frac{\partial f}{\partial u}(u,x)\mathrm{d}\mu(x)$$

Application 32 : Soit φ intégrable sur $[0,1]$. On pose $F(t) = \int_0^1 \sqrt{\varphi(x)^2 + t}\mathrm{d}x$. Alors, F est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $]0,+\infty[$.
F est dérivable en 0 si, et seulement si, $\frac{1}{\varphi}$ est intégrable.

Application 33 : (Intégrale de Gauss) En considérant $g : x \in [0,+\infty[\longmapsto \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t$, on en déduit que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Application 34 : (Intégrale de Dirichlet) En considérant $h : x \in\in \mathbb{R}_+ \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}\mathrm{d}t$, on en déduit que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

2.3 Théorème de Fubini

Théorème 35 (Fubini-Tonelli). *Soit $f : X \times Y \longrightarrow [0,+\infty]$ une fonction mesurable. On suppose que μ et ν sont deux mesures σ-finies sur X et Y. Alors, $x \longmapsto \int_Y f(x,y)\mathrm{d}\nu(y)$ et $y \longmapsto \int_X f(x,y)\mathrm{d}\mu(x)$ sont mesurables et*

$$\int_{X\times Y} f\mathrm{d}\mu\otimes\nu = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\mathrm{d}\mu(x)\right)\mathrm{d}\nu(y)$$

Théorème 36 (Fubini). *On suppose de nouveau que μ et ν sont σ-finies et $f : X \times Y \longrightarrow K$ intégrable. Alors,*

1. *Pour presque tout x, $y \longmapsto f(x,y)$ est intégrable et pour presque tout y, $x \longmapsto f(x,y)$ est intégrable.*
2. *$x \longmapsto \int_Y f(x,y)\mathrm{d}\nu(y)$ et $y \longmapsto \int_X f(x,y)\mathrm{d}\mu(x)$ sont intégrables.*
3. $$\int_{X\times Y} f\mathrm{d}\mu\otimes\nu = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\mathrm{d}\mu(x)\right)\mathrm{d}\nu(y)$$

Remarque 37 : Il est important d'avoir le fait que f est intégrable sur l'espace produit $X \times Y$ et pas seulement l'intégrabilité partielle par rapport sur X et Y : $f : (x,y) \in \mathbb{R}_+ \times [0,1] \longmapsto 2e^{-2xy} - e^{-xy}$.

DEVELOPPEMENT 1

Application 38 : Si $f \in \mathcal{C}^0\big([0,1]\big)$, on définit

$$I(f) : x \in [0,1] \longmapsto \sqrt{\frac{x}{\pi}} \int_0^1 \frac{f(ux)}{\sqrt{1-u}}\mathrm{d}u$$

Alors, I est un opérateur continu de $\mathcal{C}^0\big([0,1]\big)$ tel que

$$\forall f \in \mathcal{C}^0\big([0,1]\big), \forall x \in [0,1], I \circ I(f)(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

3 Transformée de Fourier

3.1 Convolution, régularisation et unité

Théorème-Définition 39. *Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, on définit le produit de convolution de f par g pour presque tout x par*

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y$$

De plus, $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et on a $\|f*g\|_1 \leqslant \|f\|_1\|g\|_1$.

Remarque 40 : Ceci munit $L^1(\mathbb{R}^n)$ d'une structure de $\mathbb{R}$-algèbre commutative, mais non unitaire.

Théorème 41. *Soit $f \in L^1_{loc}$ et $g \in \mathcal{C}_0^\infty$, alors $f * g$ est définie partout et est $\mathcal{C}^\infty$. De plus, on a*

$$\partial_{x_i}(f * g) = f * \partial_{x_i} g$$

Remarque 42 : Il suffit en fait de supposer que g est $\mathcal{C}^\infty$ bornées, dont les dérivées sont bornées.

Définition 43 (Approximation de l'unité)**.** *On dit qu'une suite (ρ_n) de fonctions L^1 est une approximation de l'unité si*

1. $\forall n \geqslant 1, \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \rho_n \mathrm{d}x = 1.$
2. $\displaystyle\sup_{n \geqslant 1} \int_{\mathbb{R}^d} |\rho_n| \mathrm{d}x < +\infty.$
3. $\forall \varepsilon > 0, \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_{|x| \geqslant \varepsilon} |\rho_n| \mathrm{d}x = 0.$

On dit que (ρ_n) est régularisante si de plus ρ_n est $\mathcal{C}^\infty$ à support compact.

Exemples 44 :

- $\rho_t(x) = \dfrac{1}{(\sqrt{2\pi}t)^d} e^{-\frac{|x|^2}{2t^2}}.$
- $\rho_t(x) = \dfrac{t}{\pi(t^2 + x^2)}.$
- Plus généralement, si $\rho \in L^1$ d'intégrale 1, alors on peut définir $\rho_n(x) = n^d \rho(nx)$. Si ρ est $\mathcal{C}^\infty$ à support compact, la suite (ρ_n) est régularisante.

Lemme 45. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on définit $\tau_a f : x \in \mathbb{R}^d \longmapsto f(x - a)$ l'opérateur de translation. Alors, $\tau : a \in \mathbb{R}^d \longmapsto \tau_a f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ est uniformément continue.*

Théorème 46. *Soit (ρ_n) une approximation de l'unité et $f \in L^1$, alors $\rho_n * f \in L^1$ et $\rho_n * f$ converge vers f dans L^1.*

Théorème 47. *Soit (ρ_n) une approximation de l'unité et $f \in L^\infty$, alors $\rho_n * f$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$. De plus, si f est uniformément continue, alors $\rho_n * f$ converge uniformément vers f.*

Théorème 48 (Densité)**.** *L'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact est dense dans L^1.*

3.2 Transformée de Fourier L^1

Définition 49. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit sa transformée de Fourier par*

$$\mathcal{F}(f) : \xi \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} \mathrm{d}x$$

Exemple 50 : Si $f = \mathbb{1}_{[-1,1]}$, alors $\mathcal{F}(f) = \mathrm{sinc}(...)$.

Proposition 51. *Soit $f, g \in L^1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$. Alors, on a les formules suivantes :*

$h(x)$	$\mathcal{F}(h)(\xi)$
$f(x)e^{i\alpha x}$	$\mathcal{F}(f)(\xi - \alpha)$
$f(x - \alpha)$	$\mathcal{F}(f)(\xi)e^{-i\alpha\xi}$
$f * g(x)$	$\mathcal{F}(f)(\xi)\mathcal{F}(g)(\xi)$
$\overline{f(-x)}$	$\overline{\mathcal{F}(f)(\xi)}$
$f(x/\lambda)$	$\lambda\mathcal{F}(f)(\lambda\xi)$

Si $x \longmapsto -ixf(x)$ est L^1, alors $\mathcal{F}(f)$ est dérivable et $\mathcal{F}(f)'(\xi) = -i\xi f(\xi)$.

Théorème 52. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{F}(f)$ est continue et tend vers 0 à l'infini. De plus, on a*

$$\|\mathcal{F}(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_1$$

DEVELOPPEMENT 2

Lemme 53. *Soit $f(x) = e^{-ax^2}$ avec $a > 0$, alors*

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$$

Théorème 54. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R})$, alors*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(\xi) e^{i\xi x} \mathrm{d}\xi$$

Remarque 55 : L'exemple 50 montre qu'on peut avoir $f \in L^1$ et $\mathcal{F}(f) \notin L^1$.

Remarque 56 : Si $f \in L^1$ et $\mathcal{F}(f) \in L^1$, alors f est une fonction continue.

Corollaire 57. *$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est injective.*

3.3 Transformée de Fourier-Plancherel

Lemme 58. *Soit E et F deux espaces métriques, avec F complet et A une partie dense dans E. Si $f : A \longrightarrow F$ est uniformément continue, alors il existe un unique prolongement continu de f à tout E. De plus, ce prolongement est uniformément continu.*

Théorème 59. *Soit $f \in L^1 \cap L^2$, alors $\mathcal{F}(f) \in L^2$ et de plus, on a $\|\mathcal{F}(f)\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$.*

Corollaire 60. *$\mathcal{F}$ se prolonge en une unique isométrie sur L^2.*

Corollaire 61. *Soit $f \in L^2$ telle que $\mathcal{F}(f) \in L^1$, alors*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(\xi) e^{ix\xi} \mathrm{d}\xi$$

Application 62 : Soit E une partie mesurable de $\mathbb{R}$, on note $M_E = \left\{f \in L^2(\mathbb{R}), f_{|E} = 0\right\}$. Alors, M_E est un sous-espace fermé de L^2 et stable par translation.
Réciproquement, tout sous-espace fermé de L^2 invariant par translation est de la forme M_E.

Références :

- Amrani, Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions.
- Bony, Théorie des distributions et analyse de Fourier.
- Briane, Pagès, Théorie de l'intégration.
- Gourdon, Analyse.
- Rudin, Analyse réelle et complexe.