234 : Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.

Pandou

19 mai 2022

1 Éléments de théorie de l'intégration de Lebesgue

1.1 Fonctions mesurables

Définition 1. *Soit $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables, on dit que $f : X \longrightarrow Y$ est mesurable si pour tout $B \in \mathcal{B}, f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.*

Exemple 2 :
- $\mathbb{1}_A$ est mesurable si, et seulement si, $A \in \mathcal{A}$.
- Toute fonction continue est mesurable.
- La composée de deux fonctions mesurables est mesurable.

Proposition 3. *L'enssemble des fonctions mesurables est une $\mathbb{R}$-algèbre.*

Proposition 4. *Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables, alors*

1. $\sup f_n$ *et* $\inf f_n$ *sont mesurables.*
2. *Si f_n converge simplement vers une fonction f, alors f est mesurable.*
3. $\limsup f_n$ *et* $\liminf f_n$ *sont mesurables.*

Exemple 5 : Si f est dérivable, alors f' est mesurable.

Définition 6. *On dit que f est simple s'il existe des parties mesurables $A_1, ..., A_k$ et $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que $f = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbb{1}_{A_i}$.*

Théorème 7. *Soit $f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Alors, il existe une suite de fonctions étagées (f_n) qui converge simplement vers f. De plus,*

1. *Si $f \geqslant 0$, on peut choisir (f_n) de sorte à ce qu'elle soit positive et croissante.*
2. *Si f est bornée, on peut choisir (f_n) de sorte à que la convergence soit uniforme.*

Remarque 8 : Voir illustration annexe (découpage de l'axe des ordonnées).

1.2 Intégrale de Lebesgue

Définition 9. *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbb{1}_{A_i}$ une fonction simple. On définit son intégrale par*

$$\int_X f \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mu(A_i)$$

Exemple 10 :
- Si μ est le Dirac en a et f une fonction simple, alors $\int_X f \mathrm{d}\mu = f(a)$.
- Si μ est la mesure de comptage sur X et f une fonction simple, alors $\int_X f \mathrm{d}\mu = \sum_{\alpha \in f(X)} \alpha \mathrm{Card}\big(\{f = \alpha\}\big)$.

Proposition 11. *Soit f et g deux fonctions simples, alors, on a :*

1. $\int_X (f+g) \mathrm{d}\mu = \int_X f \mathrm{d}\mu + \int_X g \mathrm{d}\mu$.
2. *Si $f \leqslant g$, alors $\int_X f \mathrm{d}\mu \leqslant \int_X g \mathrm{d}\mu$.*
3. *Si $\lambda \geqslant 0$, alors $\int_X (\lambda f) \mathrm{d}\mu = \lambda \int_X f \mathrm{d}\mu$.*

Définition 12. *Soit f une fonction mesurable et positive, on définit*

$$\int_X f \mathrm{d}\mu = \sup \left\{ \int_X \varphi \mathrm{d}\mu, \varphi \leqslant f, \varphi \text{ simple} \right\}$$

On dit que f est intégrable si $\int_X f \mathrm{d}\mu < +\infty$.

Théorème 13 (Convergence monotone)**.** *Soit (f_n) une suite croissante de fonctions mesurables positives, alors $\lim f_n$ est mesurable et on a*

$$\int_X f \mathrm{d}\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu$$

Remarque 14 : Les points de la proposition 11. sont toujours vraies pour des fonctions mesurables et positives.

Proposition 15. *Soit f mesurable positive, alors $\int_X f\mathrm{d}\mu = 0$ si, et seulement si, $\mu\big(\{f \neq 0\}\big) = 0$.*

Définition 16. *Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable, on dit que f est intégrable si $|f|$ est intégrable. On note $\mathcal{L}^1$ l'espace des fonctions intégrables.*
On définit alors $\int_X f\mathrm{d}\mu = \int_X f^+\mathrm{d}\mu - \int_X f^-\mathrm{d}\mu$.

Théorème 17. *L'intégrale est une forme linéaire positive.*
De plus, si $f \in \mathcal{L}^1$, on a $\left|\int_X f\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \int_X |f|\mathrm{d}\mu$ et on a égalité si, et seulement si, f est de signe constant μ-presque partout.

Proposition 18. *Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est mesurable et Riemann-intégrable, alors f est intégrable et $\int_a^b f = \int_{[a,b]} f\mathrm{d}\lambda$ où λ est la mesure de Lebesgue.*

Exemple 19 : $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ est intégrable, mais pas Riemann-intégrable.

1.3 Théorèmes de convergence et applications

Théorème 20 (Lemme de Fatou)**.** *Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables positives, alors*

$$\int_X \liminf_{n\to+\infty} f_n\mathrm{d}\mu \leqslant \liminf_{n\to+\infty}\int_X f_n\mathrm{d}\mu$$

Application 21 : Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ croissante, continue en 0 et en 1 et dérivable presque partout sur $[0,1]$, alors $\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x \leqslant f(1) - f(0)$.
L'inégalité peut être stricte avec $f = \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1]}$.

Théorème 22 (Convergence dominée)**.** *Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables qui converge simplement presque partout vers f. On suppose qu'il existe g intégrable telle que $|f_n| \leqslant g$ presque partout.*
Alors, f coincide avec une fonction intégrable presque partout et

$$\lim_{n\to+\infty}\int_X |f_n - f|\mathrm{d}\mu = 0$$

En particulier,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_X f_n\mathrm{d}\mu = \int_X f\mathrm{d}\mu$$

Application 23 :

- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta)^n\mathrm{d}\theta \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- $\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty}\int_0^n t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\mathrm{d}t$.
- Si f est dérivable sur $[0,1]$, de dérivée bornée, alors $\int_0^1 f'(t)\mathrm{d}t = f(1) - f(0)$.

Théorème 24. *Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\int_X |f_n|\mathrm{d}\mu\right)$ converge, alors*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\int_X f_n\mathrm{d}\mu\right) = \int_X\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n\right)\mathrm{d}\mu$$

Application 25 : Soit f une fonction intégrable, alors

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall A \in \mathcal{A}, \mu(A) \leqslant \delta \Longrightarrow \int_A |f|\mathrm{d}\mu \leqslant \varepsilon$$

Théorème 26 (Continuité sous l'intégrale)**.** *Soit E un espace mesuré et X un espace mesuré et $f : E \times X \longrightarrow \mathbb{R}$.*

1. *Si $\forall u \in E, x \longmapsto f(u,x)$ est mesurable.*
2. *Si $u \longmapsto f(u,x)$ est continue en $u_0 \in E$ pour presque tout x.*
3. *S'il existe g intégrable telle que $\forall u \in E, \big|f(u,x)\big| \leqslant g(x)$ pour presque tout x.*

Alors, $u \longmapsto \int_X f(u,x)\mathrm{d}\mu(x)$ est définie pour tout $u \in E$ et est continue en u_0.

Application 27 :

- Soit $f \in \mathcal{L}^1$, alors $\mathcal{F}(f) : \xi \longmapsto \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x$ est continue.
- Soit $f \in \mathcal{L}^1$ et φ continue bornée, alors $f * \varphi : x \longmapsto \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\varphi(y)\mathrm{d}y$ est continue.

Théorème 28 (Dérivation sous l'intégrale)**.** *On suppose que E est un intervalle ouvert et $u_0 \in E$. On suppose que*

1. *Pour tout $u \in I, x \longmapsto f(u,x)$ est intégrable.*
2. *Pour presque tout x, $u \longmapsto f(u,x)$ est dérivable sur E.*
3. *Il existe g intégrable telle que $\forall u \in E, \left|\frac{\partial f}{\partial u}(u,x)\right| \leqslant g(x)$ pour presque tout x.*

Alors, $F(u) = \int_X f(u,x)\mathrm{d}\mu(x)$ est dérivable sur E et on a

$$F'(u) = \int_X \frac{\partial f}{\partial u}(u,x)\mathrm{d}\mu(x)$$

Application 29 :
- Si $x \longmapsto xf(x)$ est intégrable, alors $\mathcal{F}(f)$ est dérivable et $\mathcal{F}(f)'(\xi) = -i\xi\mathcal{F}(f)(\xi)$.
- Soit $f \in \mathcal{L}^1$ et φ dérivable, bornée et à dérivée bornée, alors $f * \varphi$ est dérivable et $(f*\varphi)' = f * \varphi'$.

1.4 Théorème de Fubini et changement de variables

Théorème 30 (Fubini-Tonelli)**.** *Soit $f : (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \longrightarrow [0, +\infty]$ une fonction mesurable positive, on suppose que μ et ν sont σ-finies. Alors,*

1. $x \longmapsto \int_Y f(x,y)\mathrm{d}\nu(y)$ *et* $y \longmapsto \int_X f(x,y)\mathrm{d}\mu(x)$ *sont mesurables.*
2. $$\int_{X\times Y} f \mathrm{d}\mu \otimes \nu = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\mathrm{d}\mu(x)\right)\mathrm{d}\nu(y)$$

Application 31 : Soit f intégrable positive et $F(x) = \int_{[0,x]} f(t)\mathrm{d}t$, alors si $a > 0$

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{F(ax) - F(x)}{x}\mathrm{d}x = \ln(a)\int_{\mathbb{R}_+} f(x)\mathrm{d}x$$

Théorème 32 (Fubini-Lebesgue)**.** *On suppose cette fois que $f \in \mathcal{L}^1(\mu \otimes \nu)$. Alors,*

1. *Pour presque tout x, $y \longmapsto f(x,y) \in \mathcal{L}^1(\nu)$ et pour presque tout y, $x \longmapsto f(x,y) \in \mathcal{L}^1(\mu)$.*
2. $x \longmapsto \int_Y f(x,y)\mathrm{d}\nu(y) \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *et* $y \longmapsto \int_Y f(x,y)\mathrm{d}\mu(x) \in \mathcal{L}^1(\nu)$.
3. $$\int_{X\times Y} f \mathrm{d}\mu \otimes \nu = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\mathrm{d}\mu(x)\right)\mathrm{d}\nu(y)$$

Remarque 33 : Il est primordial que f soit intégrable sur le produit : $f(x,y) = 2e^{-2xy}e^{-xy}$ donne un contre-exemple sinon.

Théorème 34 (Changement de variables)**.** *Soit $\varphi : U \longrightarrow V$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme, alors*

1. *Si $f : V \longrightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable, alors, on a*
$$\int_V \psi(y)\mathrm{d}y = \int_U \psi \circ h(x)\left|\det \mathrm{d}\varphi(x)\right|\mathrm{d}x$$
2. *On a le même résultat pour f de signe quelconque si elle est intégrable.*

Application 35 : Si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{r=0}^{+\infty}\int_{\theta=-\pi}^{\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

En particulier, on en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Application 36 : Si v_d est le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^d$, alors on a $v_d = \dfrac{2\pi}{d}v_{d-2}$.

2 Espaces L^p

2.1 Généralités

Définition 37. *Pour $1 \leqslant p < +\infty$, on note$\mathcal{L}^p(\mu)$ l'espace des fonctions mesurables telles que $|f|^p$ est intégrable, on note $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}$.*
On note $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ l'espace des fonctions mesurables telles que $\inf\{M > 0, \mu(f > M) = 0\}$, on note $\|f\|_\infty$ cette borne inférieure.
Si $1 \leqslant p \leqslant .\infty$, $L^p(\mu)$ le quotient de $\mathcal{L}^p(\mu)$ par la relation d'égalité presque partout.

Théorème 38 (Inégalité de Hölder)**.** *Soit $f \in \mathcal{L}^p$ et $g \in \mathcal{L}^q$ avec $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, alors $fg \in \mathcal{L}^1$ et on a*

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p\|g\|_q$$

avec égalité si, et seulement si, il existe λ, μ tels que $\lambda|f|^p = \mu|g|^q$ presque partout.

Corollaire 39 (Inégalité de Minkowski)**.** *$L^p(\mu)$ est un espace normé pour la norme $\|\cdot\|_p$.*

Théorème 40 (Riesz-Fischer)**.** *Soit $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, alors L^p est un espace de Banach.*

Corollaire 41. *Soit (f_n) une suite de fonctions L^p qui converge vers f dans L^p, alors il existe une sous-suite qui converge presque partout.*

2.2 Théorèmes de densité

Proposition 42. *Si $1 \leqslant p < +\infty$, l'ensemble des fonctions simples intégrables est dense dans L^p.*

Théorème 43 (Admis)**.** *Ici, on travaille sur $\mathbb{R}$ avec sa tribu borélienne et la mesure de Lebesgue. Si $1 \leqslant p < +\infty$, alors, l'ensemble des fonctions continues à support compact est dense dans L^p.*
Par contre, $L^\infty(\mathbb{R})$ n'est pas séparable.

DEVELOPPEMENT 1

Théorème 44 (Inégalité de Hardy). *Soit $p > 1$, si $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, on pose $Tf : x \longmapsto \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. Alors, T est un opérateur continu sur $L^p(\mathbb{R}_+)$. De plus, on a*

$$\|Tf\|_{L^p} \leqslant \frac{p}{p-1}\|f\|_{L^p}$$

De plus, la constante $\frac{p}{p-1}$ est optimale.

2.3 Convolution et régularisation

Définition 45. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^p(\mathbb{R})$, on définit une fonction pour presque tout x par $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y$.*

Proposition 46. *Si $f \in L^1$ et $g \in L^p$, alors $f * g \in L^p$ et*

$$\|f * g\|_p \leqslant \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^p}$$

Proposition 47. *Si f est $\mathcal{C}_c^k$ et $g \in L^1_{loc}$, alors $f * g$ est $\mathcal{C}^k$.*

Proposition 48. *Si $1 \leqslant p < +\infty$ et $f \in L^p$, alors $a \in \mathbb{R} \longmapsto \tau_a f \in L^p$ est uniformément continue.*

Définition 49. *Une approximation de l'unité est une suite de fonctions intégrables (ρ_n) telles que*

1. *Pour tout n, $\rho_n \geqslant 0$ et $\int_{\mathbb{R}} \rho_n(x)\mathrm{d}x = 1$.*
2. *Pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{n\to+\infty} \int_{|x|>\varepsilon} \rho_n(x)\mathrm{d}x = 0$.*

Si de plus, (ρ_n) est $\mathcal{C}^\infty$, on dit que (ρ_n) est régularisante.

Exemples 50 :

- $\rho_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{|x|^2}{2t}}$ est une approximation de l'unité.
- $\rho_t(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{t^2+x^2}$ est une approximation de l'unité.
- Si ρ est une fonction positive $\mathcal{C}^\infty$ à support compact, on a une suite régularisante en posant $\rho_n(x) = n\rho(nx)$.

Proposition 51. *Soit $1 \leqslant p < +\infty$, $f \in L^p$ et (ρ_n) une approximation de l'unité, alors $\rho_n * f \longrightarrow f$ dans L^p.*
Si de plus, f est continue, alors la convergence est uniforme sur tout compact.

Corollaire 52. *$\mathcal{C}_c^\infty$ est dense dans L^p pour $1 \leqslant p < +\infty$.*

Théorème 53. *Soit $1 \leqslant p < +\infty$ et H une partie de L^p. Alors H est relativement compact si, et seulement si, on a les critères suivants :*

1. *H est borné dans L^p.*
2. *$\lim_{R\to+\infty} \int_{|x|>R} |f(x)|^p\mathrm{d}x = 0$ uniformément par rapport à $f \in H$.*
3. *$\lim_{a\to 0} \tau_a f = f$ dans L^p uniformément pas rapport à $f \in H$.*

3 Applications

3.1 Transformée de Fourier et traitement du signal

Définition 54. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit sa transformée de Fourier par*

$$\mathcal{F}(f) : \xi \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\xi x}\mathrm{d}x$$

Proposition 55. *Soit $f, g \in L^1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$, on a alors*

$h(x)$	$\mathcal{F}(h)(x)$
$f(x)e^{i\alpha x}$	$\mathcal{F}(g)(\xi-\alpha)$
$f(x-\alpha)$	$\mathcal{F}(f)(\xi)e^{-i\alpha\xi}$
$f * g$	$\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$
$\overline{f(-x)}$	$\overline{\mathcal{F}(f)(\xi)}$
$f\left(\frac{x}{\lambda}\right)$	$\lambda\mathcal{F}(f)(\lambda\xi)$

Proposition 56. *$\mathcal{F}$ est un opérateur continu de L^1 vers l'ensemble des fonctions continues qui tendent vers 0 en $\pm\infty$. On a même $\|\mathcal{F}(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_1$.*

Lemme 57. *Si $f_a(x) = e^{-ax^2}$, alors*

$$\mathcal{F}(f_a)(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$$

Théorème 58 (Inversion de Fourier). *Si $f \in L^1$ telle que $\mathcal{F}(f) \in L^1$, alors*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(\xi)e^{ix\xi}\mathrm{d}x$$

Remarque 59 : Si $\mathcal{F}(f) \in L^1$, alors f est continue, on ne peut donc a priori pas calculer l'inverse de Fourier autre que des fonctions continues.

Corollaire 60. *$\mathcal{F}$ est injective.*

Théorème 61 (Fourier-Plancherel). *Si $f \in L^1 \cap L^2$, alors $\mathcal{F}(f) \in L^2$. De plus, on a $\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \|f\|_2$.*

Corollaire 62. *Comme $L^1 \cap L^2$ est dense dans L^2, cela définit $\mathcal{F}$ sur tout L^2.*

Exemple 63 : Calcul des transformées de Fourier du sinus cardinal et des indicatrices.

DEVELOPPEMENT 2

Théorème 64 (Échantillonnage de Shannon)**.** *On note* $I = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ *et on définit*

$$BL^2 = \left\{u \in L^2(\mathbb{R}), \widehat{u} = 0 \text{ presque partout sur } \mathbb{R} \setminus I\right\}$$

1. *BL^2 est un espace de Hilbert et on a une injection continue $BL^2 \hookrightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.*
2. *Une base hilbertienne de BL^2 est $(\tau_k \mathrm{sinc})_{k\in\mathbb{Z}}$.*
3. *$u \in BL^2 \longmapsto \big(u(n)\big)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ est une isométrie. Plus précisément, on a*

$$u(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u(k)\mathrm{sinc}(x-k)$$

où la convergence a lieu dans L^2 et est uniforme.

3.2 Espaces de Sobolev en dimension 1 et résolution d'EDP

Définition 65. *Soit $I =]a, b[$ éventuellement non borné, on pose*

$$H^1(I) = \left\{u \in L^2(I), \exists g \in L^2(I), \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(I), \int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi\right\}$$

muni du produit scalaire $\langle u, v\rangle_{H^1} = \langle u, v\rangle_{L^2} + \langle u', v'\rangle_{L^2}$.

Proposition 66. *$H^1(I)$ est un espace de Hilbert séparable et on a une injection continue $H^1(I) \hookrightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.*

Définition 67. *On note $H_0^1(I)$ l'adhérence de $\mathcal{C}_c^\infty(I)$ dans $H^1(I)$ pour la norme H^1.*

Théorème 68. *Soit $u \in H^1(I)$, alors $u \in H_0^1(I)$ si, et seulement si, $u(a) = u(b) = 0$.*

Théorème 69 (Inégalité de Poincaré)**.** *On suppose que I est borné, alors il existe une constante C telle que*

$$\forall u \in H_0^1(I), \|u\|_{H^1} \leqslant C\|u'\|_{L^2}$$

Définition 70. *Soit (E_1) : $\left\{\begin{array}{lcl} -u'' + u & = & f \\ u(0) = u(1) & = & 0 \end{array}\right.$, une solution faible de (E_1) est un élément $u \in H_0^1(I)$ telle que*

$$\forall v \in H_0^1(I), \int_I u'v' + \int_I uv = \int_I fv$$

Théorème 71. *Si $f \in L^2$, il existe une unique solution faible de (E_1). De plus, si f est continue sur $\overline{I}$, alors u est $\mathcal{C}^2$ sur $\overline{I}$.*

Définition 72. *Soit (E_2) : $\left\{\begin{array}{lcl} -(pu')' + qu & = & f \\ u(0) = u(1) & = & 0 \end{array}\right.$, une solution faible de (E_2) est un élément de $u \in H_0^1(I)$ telle que*

$$\forall v \in H_0^1(I), \int_I pu'v' + \int_I quv = \int_I fv$$

Théorème 73. *On suppose que $f \in L^2$, $p \in \mathcal{C}^1(\overline{I})$ telle que $p \geqslant \alpha > 0$ et $q \in \mathcal{C}^0(\overline{I})$, alors (E_2) a une unique solution faible. Si de plus, f est continue, alors u est $\mathcal{C}^2$ sur $\overline{I}$.*

Remarque 74 : La définition de formulation faible et donc le choix de l'espace de Hilbert est primordial :

- Pour $\left\{\begin{array}{lcl} -(pu')' + ru' + qu & = & f \\ u(0) = u(1) & = & 0 \end{array}\right.$, on travaille dans $H_0^1(I)$.
- Pour $\left\{\begin{array}{lcl} -u'' + u & = & f \\ u'(0) = u'(1) & = & 0 \end{array}\right.$, on travaille dans $H^1(I)$.
- Pour $\left\{\begin{array}{lcl} -u'' + u & = & f \\ u(0) & = & u(1) \\ u'(0) & = & u'(1) \end{array}\right.$, on travaille dans $H = \left\{v \in H^1(I), v(0) = v(1)\right\}$.

Références :

- Brézis, Analyse fonctionnelle.
- Briane, Pagès, Gilles, Théorie de l'intégration.
- Bony, Théorie des distributions et analyse de Fourier.
- Hirsch, Lacombe, Éléments d'analyse fonctionnelle.
- Rudin, Analyse réelle et complexe.