230 : Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

Pandou

2 juin 2021

Dans toute la suite, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Généralités

1.1 Définitions

Définition 1. *Soit (u_n) une suite à valeurs dans K. La série de terme général u_n est la suite (S_n) définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.*
S_n est appelée la somme partielle.
Si (S_n) converge, on dit que la série $\sum u_n$ converge et sa limite est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. Dans ce cas, on note $R_n = \sum_{k \geqslant n+1} u_k$ le reste d'ordre n.
Si (S_n) diverge, on dit que la série $\sum u_n$ diverge.

Exemple 2 : Soit $a \in \mathbb{C}$, la série $\sum a^n$ converge si, et seulement si, $|a| < 1$ et dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$.

Proposition 3. *Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries convergentes, alors $\sum (u_n + v_n)$ et $\sum (\lambda u_n)$ sont convergentes.*

Proposition 4. *Si $\sum u_n$ est une série convergente, alors $u_n \longrightarrow 0$.*

Remarque 5 : La réciproque est fausse : $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ diverge.

Définition 6. *On dit que $\sum u_n$ diverge grossièrement si la suite (u_n) ne tend pas vers* 0.

1.2 Critères de convergence

Proposition 7. *Soit (a_n) une suite d'éléments de K. Alors, la suite (a_n) converge si, et seulement si, la série $\sum (a_{n+1} - a_n)$ converge. Dans ce cas, on a*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} (a_{n+1} - a_n) = \lim_{n \to +\infty} a_n - a_0$$

Exemple 8 : $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ converge et sa somme est 1.

Théorème 9 (Critère de Cauchy)**.** *$\sum u_n$ converge si, et seulement si,*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \forall p \geqslant 1, \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| \leqslant \varepsilon$$

Exemple 10 : $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Définition 11. *On dit que $\sum u_n$ est absolument convergente lorsque $\sum |u_n|$ converge.*

Théorème 12. *Toute série absolument convergente est convergente.*

Exemple 13 : La réciproque est fausse : si $u_{2p} = -\frac{1}{p}$ et $u_{2p+1} = \frac{1}{p}$, alors $\sum u_p$ converge mais pas absolument.

1.3 Séries semi-convergentes et réarrangement de termes

Définition 14. *On dit que $\sum u_n$ est semi-convergente lorsque $\sum u_n$ converge et $\sum |u_n|$ diverge.*

Proposition 15. *Soit (u_n) une suite de réels, on note $u_n^+ = \max(u_n, 0)$ et $u_n^- = \max(-u_n, 0)$. Si $\sum u_n$ est semi-convergente, alors $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ divergent.*

Théorème 16. *Soit $\sum a_n$ une série semi-convergente et $\alpha \in \mathbb{R}$. Il existe une permutation σ de $\mathbb{N}$ telle que $\sum a_{\sigma(n)}$ converge et est de somme α.*

Proposition 17. *Si $\sum a_n$ est absolument convergente, alors pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, $\sum a_{\sigma(n)}$ converge et de somme $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$.*

Définition 18. *Soit (u_n) une suite d'éléments de K et (n_k) une suite d'entiers strictement croissante, on considère un paquet $v_k = \sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} u_j$.*

La série $\sum v_k$ est la série obtenue par $\sum u_n$ par regroupement par paquets.

Théorème 19 (Sommation par paquets)**.** *Soit $\sum u_n$ une série.*

1. *Si $\sum u_n$ converge, alors toute série obtenue par regroupement par paquets est convergente et les deux séries ont même somme.*
2. *Si $\sum u_n$ est à termes positifs, alors toute série obtenue par regroupement par paquets est de même nature que $\sum u_n$.*

Remarque 20 : Si $\sum u_n$ ne converge pas, le regroupement par paquets peut changer la nature de la série : $\sum (-1)^n$ diverge, mais $\sum \left((-1)^{2n} + (-1)^{2n+1}\right)$ converge.

2 Séries à termes positifs

Lemme 21. *Une série à termes positifs converge si, et seulement si, la suite (S_n) des sommes partielles est majorée. Sinon, $S_n \longrightarrow +\infty$.*

2.1 Règle de comparaison

Théorème 22. *Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang. Alors*

1. *Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge aussi.*
2. *Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.*

Exemple 23 : $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

Théorème 24. *Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs.*

1. *Si $u_n = O(v_n)$ et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.*
2. *Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.*

2.2 Comparaison série-intégrale

Théorème 25. *Soit $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ décroissante. Alors, $\sum f(n)$ et $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ ont même nature.*

Corollaire 26 (Série de Riemann)**.** $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ *converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.*

Corollaire 27 (Séries de Bertrand)**.** $\sum \frac{1}{n\ln(n)^\beta}$ *converge si, et seulement si, $\beta > 1$.*

2.3 Estimation des sommes partielles et des restes

Théorème 28. *Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n = O(v_n)$. Si $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ aussi et on a :*

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = O\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$$

Théorème 29. *Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n = o(v_n)$. Si $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ aussi et on a :*

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$$

Théorème 30. *Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n \sim v_n$.*

1. *Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors*

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$$

2. *Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, alors*

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k$$

DEVELOPPEMENT 1

Application 31 :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{2n}\right)$$

3 Séries à termes quelconques

3.1 Critères de convergence

Théorème 32 (Règle de Cauchy). *Soit* $\sum u_n$ *une série à termes réels ou complexes et* $R = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} \in [0, +\infty]$.

1. *Si* $R < 1$, $\sum u_n$ *converge absolument.*
2. *Si* $R > 1$, $\sum u_n$ *diverge grossièrement.*

Remarque 33 : Si $R = 1$, on ne peut rien dire : $u_n = (-1)^n$ et $u_n = \frac{1}{n^2}$.

Exemple 34 : $u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$, alors $\sum u_n$ converge.

Théorème 35 (Règle de d'Alembert). *Soit* $\sum u_n$ *une série de réels ou de complexes non nuls à partir d'un certain rang. On suppose que* $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ *converge vers un réel* ℓ.

1. *Si* $\ell < 1$, $\sum u_n$ *converge absolument.*
2. *Si* $\ell > 1$, $\sum u_n$ *diverge grossièrement.*

Remarque 36 : Si $\ell = 1$, on ne peut rien dire comme le montre $u_n = \frac{1}{n}$ et $u_n = \frac{1}{n^2}$.

Proposition 37 (Règle de Raab-Duhamel). *Soit* $\sum u_n$ *une série à termes* > 0 *telle que* $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1 + \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)}$. *Alors, il existe* $\lambda > 0$ *tel que* $u_n \sim \frac{\lambda}{n^a}$.
En particulier, si $a > 1$, $\sum u_n$ *converge et si* $a < 1$, $\sum u_n$ *diverge.*

3.2 Séries alternées

Définition 38. *Une série alternée est une série de la forme* $\sum (-1)^n a_n$ *où* (a_n) *est une suite réelle de signe constant.*

Théorème 39. *Si* (a_n) *est positive et décroît vers* 0, *alors* $\sum (-1)^n a_n$ *converge et on a*

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n} \qquad \text{et} \qquad |R_n| \leqslant a_{n+1}$$

Remarque 40 : Ce résultat permet de montrer la convergence uniforme de certaines séries de fonctions "alternées".

Remarque 41 : L'hypothèse de décroissance est primordiale : $a_n = \frac{1}{\sqrt{n} + (-1)^n}$. On a en effet : $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exemple 42 : $\sum \sin(n!\pi e)$ est semi-convergente. En effet, $\sin(n!\pi e) = \frac{(-1)^{n+1}\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Théorème 43 (Règle d'Abel). *Soit* $\sum \alpha_n v_n$ *une série de réels ou de complexes. On suppose que*

1. (α_n) *positive et décroissante vers* 0.
2. $\sum v_n$ *bornée.*

Alors, $\sum \alpha_n v_n$ *est convergente.*

Application 44 : $\sum \alpha_n e^{in\theta}$ est convergente, avec (α_n) positive et décroissante vers 0. Par exemple $\alpha_n = \frac{1}{n}$.

Application 45 : Si (c_n) est une suite réelle décroissante vers 0, alors la série de fonctions $\sum c_n e^{inx}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et uniformément sur tout compact de $]0, 2\pi[$.

3.3 Produit de Cauchy

Définition 46. *Soit* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries. On définit leur produit de Cauchy comme la série* $\sum w_n$ *où*

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$$

Théorème 47. *Soit* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries convergentes, dont au moins l'une des deux est absolument convergente. Alors,* $\sum w_n$ *est convergente et*

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$$

De plus, si les deux séries convergent absolument, $\sum w_n$ *converge absolument.*

Remarque 48 : Si les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, il est possible que $\sum w_n$ diverge : $u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

Application 49 : Si $z, z' \in \mathbb{C}, \exp(z+z') = \exp(z)\exp(z')$.

4 Séries entières

Définition 50. *Une série entière est une série de la fonctions de la forme* $\sum a_n z^n$.

Lemme 51. *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière et* $z_0 \in \mathbb{C}$ *tel que* $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée. Alors,*

1. *Si* $|z| < |z_0|$, $\sum a_n z^n$ *converge absolument.*
2. $\sum a_n z^n$ *converge normalement sur* $D(0,r)$ *pour tout* $0 < r < |z_0|$.

Théorème-Définition 52. *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière. Les parties de* $\mathbb{R}$ *suivantes ont la même borne supérieure :*

1. $\left\{r \geqslant 0, \sum a_n r^n \text{ converge}\right\}$.
2. $\left\{r \geqslant 0, \sum a_n r^n \text{ converge absolument}\right\}$.
3. $\{r \geqslant 0, (a_n r^n) \text{ converge vers } 0\}$.
4. $\{r \geqslant 0, (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$.

Cet élément est noté R *et est appelé le rayon de convergence de* $\sum a_n z^n$.

Exemple 53 : Soit π_n la n-ième décimale de π, alors $\sum \pi_n z^n$ est de rayon 1.

Proposition 54. *Soit* R *le rayon de convergence de* $\sum a_n z^n$.

- $\sum a_n z^n$ *converge normalement sur tout* $D(0,r)$ *pour* $r < R$.
- *Si* $|z| = R$, *on ne peut rien dire de la nature de* $\sum a_n z^n$.

Remarque 55 : Les règles de d'Alembert et de Cauchy présentées précédemment permettent le calcul du rayon des séries entières.

DEVELOPPEMENT 2

Théorème 56 (Abel angulaire)**.** *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière de rayon* 1 *et de somme* f. *Soit* $\theta_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, *on considère le domaine angulaire*

$$\mathcal{A}_{\theta_0} = \left\{1 - \rho e^{i\theta}, \theta \in [-\theta_0, \theta_0], \rho > 0\right\}$$

Si $\sum a_n$ *converge, alors*

$$\lim_{z\to 1, z\in\mathcal{A}_{\theta_0}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Application 57 : Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont convergentes, on note $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Si $\sum c_n$ converge, alors, on a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n\right)$$

Théorème 58 (Taubérien faible)**.** *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière de rayon* 1 *et de somme* f *telle que* $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ *existe, notée* S. *On suppose que* $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, *alors* $\sum a_n$ *converge et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$$

Remarque 59 : En toute généralité, la conclusion du théorème précédent est fausse : par exemple $a_n = (-1)^n$, on a $f(x) \longrightarrow \frac{1}{2}$, mais $\sum (-1)^n$ ne converge pas.

Remarque 60 : Si $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, le résultat est encore vrai, mais beaucoup plus difficile : c'est le théorème taubérien dit fort.

Références :

- Amrani, Suites et séries numériques et suites et séries de fonctions.
- FGN, Analyse 1.
- Gourdon, Analyse.
- Tauvel, Analyse complexe pour la L3.