

1 Fonctions monotones

1.1 Généralités

Définition 1. Soit $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que

- f est croissante si

$$\forall x, y \in A, x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$$

- f est décroissante si $-f$ est croissante.
- f est monotone si f est croissante ou décroissante.

On ajoutera “strictement” si le cas d’égalité se produit seulement pour $x = y$.

Exemple 2 :

- Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x}$. Alors, f est strictement décroissante sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, mais n’est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$.
- Soit $f : x \mapsto x^2$. Alors, f est strictement monotone sur chaque intervalle $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, mais n’est pas monotone sur $\mathbb{R}$.

Proposition 3. Soit $f, g : I, J \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions croissantes telles que $f(I) \subset J$.

1. $f + g$ est croissante.
2. Si $\lambda \geq 0$, λf est croissante.
3. Si f et g sont de plus positives, alors $f \times g$ est croissante.
4. Si $f > 0$, alors $\frac{1}{f}$ est décroissante.
5. $f \circ g$ est croissante. Plus généralement, si f et g ont même monotonie, alors $f \circ g$ est toujours décroissante.

Théorème 4. Soit f une fonction monotone sur $[a, b]$, alors f admet des limites à gauche et à droite en tout point de $]a, b[$. De plus, f admet une limite à droite en a et à gauche en b .

Proposition 5. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ monotone, alors l’ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.

Théorème 6 (de la bijection). Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement croissante. Alors, $f(I)$ est un intervalle de même nature que I . De plus, f est un homéomorphisme strictement croissant sur $f(I)$.

Proposition 7. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors, f est injective si, et seulement si, elle est strictement monotone.

Remarque 8 : Topologiquement, dans $\mathbb{R}$, le critère d’homéomorphisme est très très faible.

1.2 Variation des fonctions

Théorème 9 (Rolle). Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème 10 (Accroissements finis). Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et dérivable sur $]a, b[$. Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

Remarque 11 : Si f est seulement supposée dérivable à droite, on a un résultat analogue : il existe $\lambda, \mu \in]a, b[$ tels que

$$f'_d(\lambda) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'_d(\mu)$$

On a idem pour dérivable à gauche.

Théorème 12. Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

1. f est croissante sur $]a, b[$ si, et seulement si, $\forall x \in]a, b[, f'(x) \geq 0$.
2. f est constante sur $]a, b[$ si, et seulement si, $\forall x \in]a, b[, f'(x) = 0$.

Corollaire 13. Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors, f est strictement croissante sur $]a, b[$ si, et seulement si, on a les deux points :

1. $\forall x \in]a, b[, f'(x) \geq 0$.
2. $\{x \in]a, b[, f'(x) > 0\}$ ne contient aucun intervalle non trivial.

Exemple 14 : $x \mapsto x^3$ est strictement croissante car $\{x \in]a, b[, f'(x) = 0\} = \{0\}$.

Remarque 15 : Le théorème 12 et son corollaire restent vrais si f est seulement dérivable à gauche ou à droite.

Méthode 16 : (Tableaux de variations) Grâce au résultat précédent, on peut partager I en sous-intervalles sur lesquels f est (strictement) monotone. On peut alors dresser un tableau de variation de f en réservant une ligne pour le signe de f' et une ligne pour la variation de f . (Voir annexe).

1.3 Fonctions à variation bornée

Définition 17. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, soit $\sigma : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ une subdivision de $[a, b]$, on note

$$V(f, \sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$$

On dit que f est à variation bornée si

$$\sup_{\sigma} V(f, \sigma) := V(f) < +\infty$$

Exemple 18 :

- Une fonction monotone est à variation bornée.
- La fonction $f : x \in [0, 1] \mapsto x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ prolongée en 0 par 0 n'est pas à variation bornée.

Proposition 19. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Alors,

1. Si f est de classe C^1 , alors f est à variation bornée et on a

$$V(f) = \int_a^b |f'(t)| dt$$

2. Si f est k -lipschitzienne, f est à variation bornée et on a

$$V(f) = k$$

3. Si f est monotone, alors f est à variation bornée et on a

$$V(f) = |f(a) - f(b)|$$

Proposition 20. Soit f et g deux fonctions à variation bornée, alors

$$V(f + g) \leq V(f) + V(g)$$

Lemme 21. Si f est à variation bornée sur $[a, b]$, alors pour tout $I \subset [a, b]$, $f|_I$ est à variation bornée. De plus, si $x < y < z$, on a

$$V(f|_{[x, y]}) + V(f|_{[y, z]}) = V(f|_{[x, z]})$$

Théorème 22. L'espace vectoriel engendré par l'ensemble des fonctions monotones sur $[a, b]$ est l'ensemble des fonctions à variation bornée.

Corollaire 23. Une fonction à variation bornée admet des limites à gauche et à droite en tout point de $]a, b[$.

2 Fonctions convexes

2.1 Généralités : cas réel

Définition 24. On dit que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si

$$\forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0, 1], f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

On dit que f est strictement convexe, si l'inégalité précédente est stricte pour $x \neq y$ et $\lambda \in]0, 1[$.

On dit que f est (strictement) concave si $-f$ est (strictement) convexe.

Interprétation 25 : Tous les points du segment $[(a, f(a)), (b, f(b))]$ sont au dessus du graphe de f .

Théorème 26. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si, et seulement si, son épigraphe $\{(x, y) \in I \times \mathbb{R}, y \geq f(x)\}$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

Proposition 27. 1. Une combinaison linéaire à coefficients positifs de fonctions convexes est convexe.

2. Si f est convexe et φ convexe croissante, alors $\varphi \circ f$ est convexe.

3. Si f, g sont convexes, alors $\max(f, g)$ est convexe.

Remarque 28 : Le produit de fonctions convexes n'est pas convexe : $x^3 = x \times x^2$. De même, la composée de deux fonctions convexes n'est pas convexe : $x \mapsto -x^2$.

Proposition 29. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe, soit $x_1, \dots, x_n \in I$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ de somme 1, alors

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

Remarque 30 : Si f est convexe, on a

$$f\left(\frac{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}\right) \leq \frac{\lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n)}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}$$

Application 31 : (Inégalité arithmético-géométrique) Si $x_1, \dots, x_n \geq 0$, alors

$$\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

Application 32 : (Inégalité de Hölder) Soit $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n > 0$, alors

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Définition 33. Soit $f : I \rightarrow]0, +\infty[$, on dit que f est log-convexe si $\ln \circ f$ est convexe.

Proposition 34. Une fonction log-convexe est convexe.

Remarque 35 : La réciproque est fautive : x n'est pas log-convexe.

Théorème 36. Soit $f : I \rightarrow]0, +\infty[$. On a équivalence entre :

1. f est log-convexe.
2. $\forall \alpha > 0, x \mapsto \alpha^x f(x)$ est convexe
3. $\forall \alpha > 0, f^\alpha$ est convexe.

Corollaire 37. La somme de deux fonctions log-convexe est log-convexe.

Exemple 38 : Γ est l'unique fonction f définie sur $]0, +\infty[$ telle que

1. $f(1) = 1$.
2. $\forall x > 0, f(x+1) = xf(x)$.
3. f est log-convexe.

Théorème 39. Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si, et seulement si,

$$\forall x, y \in I, f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

2.2 Régularité : cas réel

Théorème 40. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si, et seulement si, pour tout $x_0 \in I$, l'application $p_{x_0} : x \in I \setminus \{x_0\} \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est croissante.

Corollaire 41. Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe admet une dérivée à gauche et à droite en tout point de $\dot{I}$. En particulier, f est continue sur $\dot{I}$. De plus, f'_g et f'_d sont croissantes et vérifient $f'_g \leq f'_d$ sur $\dot{I}$.

Application 42 : Une fonction à la fois convexe et concave est affine.

Application 43 : Une fonction convexe et majorée sur $\mathbb{R}$ est constante.

Proposition 44. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe, alors pour $x \in I$, on a

$$f(x) = \sup \{g(x), g \leq f \text{ et } g \text{ affine}\}$$

Application 45 : Soit f une fonction intégrable sur $[0, 1]$ et φ une fonction convexe, alors

$$\varphi\left(\int_0^1 f(x)dx\right) \leq \int_0^1 \varphi \circ f(x)dx$$

Théorème 46. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. On a équivalence entre :

1. f est convexe.
2. f' est croissante.
3. La courbe de f est au-dessus de ses tangentes.

Corollaire 47. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable deux fois, alors f est convexe si, et seulement si, $f'' \geq 0$.

2.3 En dimension supérieure

Définition 48. Soit C un convexe ouvert de $\mathbb{R}^n$. On dit que $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si

$$\forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0, 1], f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

Proposition 49. Une fonction f est convexe si, et seulement si, pour tout $x, y \in C$, la fonction $t \in [0, 1] \mapsto f((1-t)x + ty)$ est convexe.

Proposition 50. Soit $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ convexe, alors f est continue et est dérivable dans toutes les directions en tout point de C .

Théorème 51. Soit $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. On a équivalence entre :

1. f est convexe sur C .
2. $\forall x, y \in C, \langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq 0$.
3. $\forall x, y \in C, f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle$.

Corollaire 52. Si f est $\mathcal{C}^2$, alors f est convexe si, et seulement si, pour tout $x \in C$, $d^2 f(x)$ est positive.

3 Applications

3.1 Suites récurrentes et monotonie

Proposition 53. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(I) \subset I$. On considère une suite récurrente définie par $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Si f est croissante, alors (u_n) est monotone.
2. Si f est décroissante, alors les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de monotonie contraire.

Illustration 54 : Voir annexe.

Exemple 55 : La suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$ est décroissante.

Proposition 56. Soit f croissante et continue sur I et $\lambda < \mu$ deux points fixes de f . La suite récurrente définie par $u_0 \in]\lambda, \mu[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors, la suite (u_n) converge soit vers λ , soit vers μ .

3.2 Optimisation

Théorème 57. Soit f une fonction convexe et dérivable sur I , alors tout point critique de f est un minimum global de f .

Corollaire 58. Tout minimum local d'une fonction convexe est un minimum global. De plus, l'ensemble des points réalisant un minimum est un convexe.

Corollaire 59. Si f est strictement convexe, alors f admet au plus un minimum.

DEVELOPPEMENT 1

Lemme 60 (Kantorovitch). Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $x \neq 0$, alors

$$\frac{\|x\|^4}{\|x\|_{A^{-1}}^2 \|x\|_A^2} \geq 4 \frac{\lambda_{\max} \lambda_{\min}}{(\lambda_{\max} + \lambda_{\min})^2}$$

Théorème 61 (Descente de gradient à pas optimal). Soit $\Phi(x) = \frac{1}{2}x^T A x - x^T b$ avec $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $b \neq 0$. Alors,

1. Φ atteint son minimum en un unique point $\bar{x}$.

2. On définit une suite par $x_0 \neq \bar{x}$ et $x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla \Phi(x_k)$ et $\alpha_k = \frac{\|\nabla \Phi(x_k)\|^2}{\|\nabla \Phi(x_k)\|_A^2}$. Alors, (x_k) converge vers $\bar{x}$.

3. On a l'estimation de la vitesse de convergence :

$$\|x_{k+1} - \bar{x}\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}} \left(\frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}} \right)^{k+1} \|x_0 - \bar{x}\|$$

4. Soit (x_k) est stationnaire à partir du rang 1, soit $\forall k, x_k \neq x_{k+1}$.

3.3 Système de Lotka-Volterra

DEVELOPPEMENT 2

Théorème 62. On considère le problème de Cauchy $\begin{cases} x' &= ax - bxy \\ y' &= -cy + dxy \\ (x(0), y(0)) &= (x_0, y_0) \end{cases}$

avec $x_0, y_0 > 0$. Alors,

1. Si (x, y) est une solution maximale, alors $x, y > 0$.
2. $H : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto a \ln(y) + c \ln(x) - by - dx$ est une intégrale première.
3. La solution maximale est globale.
4. x et y sont périodiques.

Références :

- Allaire, Analyse numérique et optimisation.
- Arnaudès, Fraysse, Cours de mathématiques, Tome 1 - Analyse.
- Gourdon, Analyse.
- Pommellet, Cours d'analyse.
- Rombaldi, Éléments d'analyse réelle.