

Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications

Pandou

4 novembre 2021

Défense de plan : Montrer le jeu entre local et global pour des fonctions régulières réelles. La non régularité est un problème physique classique : il est commun de regarder la réaction d'un système à une marche de Heaviside ou à une impulsion de Dirac. On pourrait croire que la non régularité est un problème sans grand impact, que "la plupart des fonctions continues sont bien dérivables" comme l'intuition qu'avaient les mathématiciens avant Bolzano et le formalisme qu'on lui connaît aujourd'hui. Il n'en est rien : les fonctions "monstres" sont même denses dans l'ensemble des fonctions continues (DEV1) !

Une idée est de considérer des approximations de ces "fonctions" par des fonctions régulières. Le Dirac est le premier objet que l'on veut essayer d'approximer (approximation de l'unité) : on parle de solution fondamentale lorsqu'il s'agit d'une équation à résoudre. Une fois le Dirac approximé, en le testant contre n'importe quelle fonction, on peut reconstituer une telle fonction d'où le DEV2. Une autre façon de régler le problème est l'introduction de la notion de dérivation faible (au sens des distributions).

1 Continuité et dérivabilité

1.1 Localité

Définition 1. Soit $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, où I est un intervalle ouvert et $a \in I$. On dit que :

- f est continue en a lorsque $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a)$.
- f est dérivable en a lorsque $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \in \mathbb{R}$ et dans ce cas, elle est notée $f'(a)$.

On dit que f est continue (resp. dérivable) sur I lorsqu'elle est continue (resp. dérivable) en tout point de I .

Remarque 2 : La définition s'étend si I a un bord en considérant des limites à gauche ou à droite.

Proposition 3. Si f est dérivable en $a \in I$, alors f est continue en $a \in I$.

Remarque 4 : La réciproque est fautive : $x \mapsto |x|$.

Remarque 5 : Il existe même des fonctions continues en tout $a \in I$, mais dérivable en aucun $a \in I$. Soit $\varphi(x) = |x|$ sur $[-1, 1]$ que l'on prolonge sur $\mathbb{R}$ par 2-périodicité, alors $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, mais nulle part dérivable.

Définition 6. On dit que f est continûment dérivable si f est dérivable et si $a \mapsto f'(a)$ est continue. On note $\mathcal{C}^0(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur I , $\mathcal{C}^1(I)$ l'ensemble des fonctions continûment dérivables sur I . Plus généralement,

$$\mathcal{C}^n(I) = \left\{ f \text{ dérivable } n \text{ fois et } f^{(n)} \text{ continue} \right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{C}^\infty(I) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^n(I)$$

Corollaire 7. On a les inclusions :

$$\mathcal{C}^\infty(I) \subset \dots \subset \mathcal{C}^{n+1}(I) \subset \mathcal{C}^n(I) \subset \dots \subset \mathcal{C}^1(I) \subset \mathcal{C}^0(I)$$

Proposition 8. Pour tout $n \in [1, \infty]$, $\mathcal{C}^n(I)$ est une $\mathbb{R}$ -algèbre (de dimension infinie). De plus, si f, g sont dérivables en a et $g(a) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2} : \mathcal{C}^n(I) \text{ est aussi stable par quotient défini.}$$

Proposition 9 (Formule de Leibniz). Si $f, g \in \mathcal{C}^n(I)$, alors

$$\forall a \in I, (fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a)$$

Proposition 10 (Dérivation d'une composée). *Si f est dérivable en $a \in I$ et g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et on a*

$$(g \circ f)'(a) = f'(a) \cdot (g' \circ f)(a)$$

Proposition 11. *f est dérivable en $a \in I$ si, et seulement si, il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $f(a+h) = f(a) + \ell h + o(h)$. Dans ce cas, $\ell = f'(a)$.*

Théorème 12 (Formule de Taylor-Young). *Soit f une fonction dérivable n fois en a , alors on a*

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o(h^n)$$

Remarque 14 : L'existence d'un développement limité à l'ordre $n \geq 2$ n'équivaut pas à la dérivabilité à l'ordre n : $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

1.2 Vers le global

Théorème 15. *Si K est un compact de $\mathbb{R}$ et f continue, alors $f(K)$ est un compact de $\mathbb{R}$. En particulier, f est bornée sur K et atteint ses bornes.*

Corollaire 16 (Homéomorphisme). *Une application continue et bijective est un homéomorphisme (global).*

Théorème 17 (de Rolle). *Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et dérivable sur $]a, b[$ et $f(a) = f(b)$. Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Application 18 : Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$, on considère p_n l'unique polynôme d'interpolation de degré n aux points $x_0, \dots, x_n$, alors

$$\exists c \in I, \forall x \in I, f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

Théorème 19 (Théorème des accroissements finis). *Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et dérivable sur $]a, b[$. Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Ce résultat permet d'établir le lien entre signe de la dérivée et monotonie de f !

Corollaire 20 (Inégalité des accroissements finis). *Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et dérivable sur $]a, b[$. S'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in]a, b[, |f'(x)| \leq M$, alors*

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$$

Application 21 Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable, alors f est lipschitzienne si, et seulement si, f' est bornée sur $\mathbb{R}$.

Application 22 : Si f est continue sur I , dérivable sur $I \setminus \{x_0\}$ tel que f' admet une limite ℓ en x_0 , alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.

Conséquence : Existence de fonctions plateaux.

Application 23 : Si $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ avec f' intégrable, alors $\sum_{n \geq 1} f(n)$ et $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ ont même nature.

Théorème 24 (Formule de Taylor-Lagrange). *Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable $n+1$ fois, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f(b) - f(a) = \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$$

Théorème 25 (Formule de Taylor avec reste intégral). *Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b])$, alors*

$$f(b) - f(a) = \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (b-t)^n dt$$

Application 26 : Soit $f :]-a, a[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, paire, telle que $\forall k, f^{(2k)} \geq 0$. Alors, f est développable en série entière sur $] -a; a[$. Le résultat est toujours vrai, si on ne suppose pas f paire.

Proposition 27. *f est continue sur I si, et seulement si pour tout ouvert O de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(O)$ est un ouvert de I .*

Théorème 28 (des valeurs intermédiaires). *Si I est un intervalle et f continue, alors $f(I)$ est un intervalle.*

Application 29 : Les ouverts-fermés de I sont I et $\emptyset$ par l'étude de la continuité des indicatrices.

Corollaire 30. *Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue, alors f est injective si, et seulement si, f est strictement monotone.*

Application 30 : $\text{Homeo}(\mathbb{R})$ agit sur $\mathbb{R}$ 2-transitivement, mais pas 3-transitivement.

Théorème 31 (Difféomorphisme). *Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable surjective. Alors, f est un difféomorphisme si, et seulement si, f' ne s'annule pas sur I . Dans ce cas :*

$$(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(a)}$$

2 Approximations et régularité à la limite

2.1 Passage à la limite

Théorème 32. $(\mathcal{C}^0([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

Proposition 33. *Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur I qui converge uniformément vers une fonction f , alors f est continue. En particulier, si $\sum f_n$ converge normalement, alors $f = \sum f_n$ est continue.*

Proposition 34. *Soit (f_n) une suite de fonctions dérivables sur I qui converge simplement vers une fonction f et telle que (f'_n) converge **uniformément** vers une fonction g , alors f est dérivable et $f' = g$.*

2.2 Approximations

Théorème 35 (Weierstrass). $\mathbb{R}[X]$ est dense dans $\mathcal{C}^0([a, b])$ pour $\|\cdot\|_\infty$.

Application 36 : Si $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) e^{int} dt = 0$.

DEVELOPPEMENT 1

Application 37 : L'ensemble des fonctions continues nulle part dérivables est dense dans $\mathcal{C}^0([a, b])$ (sans Baire).

Théorème 38 (Convergence des séries de Fourier). *Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, périodique et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors sa série de Fourier converge normalement vers f .*

Théorème 39 (Weierstrass trigonométrique). *Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue et 2π -périodique, alors f est limite uniforme de polynômes trigonométriques.*

DEVELOPPEMENT 2

Définition 40 (Approximation de l'unité). *Une approximation de l'unité est une suite de fonctions (ρ_n) qui sont $\mathcal{C}^\infty$ à support compact, inclus dans $\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$ et tel que $\int_{\mathbb{R}} \rho_n = 1$.*

Lemme 41. *Si f est continue, alors $\rho_n * f \rightarrow f$ uniformément sur tout compact, où $*$ est le produit de convolution.*

Théorème 42. $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$ pour $1 \leq p < +\infty$.

3 Dérivation faible

Définition 43. *Une distribution T est une forme linéaire sur $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ continue, au sens suivant : pour tout compact $K \subset \mathbb{R}$, il existe $p \geq 1$ tel que*

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(K), |\langle T, \varphi \rangle| \leq \sup_{\alpha \leq p} \|\varphi^{(\alpha)}\|_{\infty, K}$$

On note $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'ensemble des distributions sur $\mathbb{R}$.

Remarque 44 : $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}) \mapsto (\varphi \mapsto \int_{\Omega} f \varphi)$ est une injection. Elle n'est pas surjective : l'impulsion de Dirac δ_0 n'est pas une fonction.

Définition 45. *Soit T une distribution sur $\mathbb{R}$ sa distribution dérivée est la distribution définie par*

$$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle$$

Exemples 46 :

- Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, alors $f' = f'$ (au sens de la dérivée et au sens des distributions).
- Au sens des distributions, $H' = \delta_0$ où $H = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$.

Théorème 47 (Formule des sauts). *Soit $f \in \mathcal{C}^1$ par morceaux qui a un nombre dénombrable de discontinuités $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ tel qu'en chaque x_n , f a une limite à gauche et à droite, alors, au sens des distributions :*

$$f' = \{f'\} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} (f(x_n^+) - f(x_n^-)) \delta_{x_n}$$

Références :

- Cours d'analyse, Pommellet.
- Analyse, 3è édition, Gourdon.
- Éléments d'analyse réelle, Rombaldi.